

BOŽIDAR NIKOLIĆ

MOLEKULARNA FIZIKA I TERMODINAMIKA

FIZIČKI FAKULTET ♦ KUĆICA SLOBODICA

Autor: Prof. dr Božidar Nikolić
Fizički fakultet, Univerziteta u Beogradu

Molekularna fizika i termodinamika

Recenzirana skripta

Izdavač: Univerzitet u Beogradu, Fizički fakultet

Recenzenti: Prof. dr Sunčica Elezović Hadžić,
Fizički fakultet, Univerziteta u Beogradu
Prof. dr Maja Burić,
Fizički fakultet, Univerziteta u Beogradu

ISBN 978-86-84539-39-9

Sadržaj

1	<i>Mehanika fluida</i>	5
	<i>Fluidi i gustina</i>	5
	<i>Pritisak u fluidu</i>	6
	<i>Potisak</i>	11
	<i>Površinski napon</i>	13
	<i>Kretanje fluida</i>	19
2	<i>Temperatura i toplota</i>	37
	<i>Temperatura i toplotna ravnoteža</i>	37
	<i>Temperaturska skala</i>	38
	<i>Gasni termometar</i>	39
	<i>Termalno širenje</i>	39
	<i>Količina toplote</i>	42
	<i>Fazni prelazi – latentna toplota</i>	44
	<i>Mehanizmi prenošenja toplote</i>	45
3	<i>Termalne osobine materije</i>	51
	<i>Jednačina stanja sistema</i>	51
	<i>Mikroskopska slika</i>	54
	<i>Molekularno kinetički model idealnog gasa</i>	56
	<i>Brzine molekula</i>	59
	<i>Sudari između molekula</i>	63
	<i>Bolcmanova raspodela</i>	65
	<i>Toplotni kapacitet</i>	68

4	<i>Prvi zakon termodinamike</i>	75
	<i>Termodinamički sistem</i>	75
	<i>Rad</i>	76
	<i>Termodinamički procesi</i>	77
	<i>Unutrašnja energija</i>	79
	<i>Unutrašnja energija idealnog gasa</i>	80
	<i>Toplotni kapacitet idealnog gasa</i>	81
	<i>Vrste termodinamičkih procesa</i>	83
5	<i>Drugi zakon termodinamike</i>	91
	<i>Smer termodinamičkog procesa</i>	91
	<i>Toplotne mašine</i>	93
	<i>Termodinamički ciklusi</i>	94
	<i>Formulacije drugog zakona termodinamike</i>	97
	<i>Karnoov ciklus</i>	99
	<i>Entropija</i>	103
	<i>Entropija i drugi zakon termodinamike</i>	107
	<i>Mikroskopska interpretacija entropije</i>	109
	<i>Treći zakon termodinamike</i>	112
6	<i>Fazni prelazi</i>	121
	<i>Faze materije–mikroskopski pogled</i>	121
	<i>Fazni prelazi – završne napomene</i>	123
	<i>Bibliografija</i>	131

Mehanika fluida

Fluid je, doslovno, ono što može da teče, tečnost ili gas. Proučavanje fluida je izuzetno važno za nas zato što ih pijemo, dišemo ih, plivamo u njima, krećemo se kroz njih. Oni protiču kroz naše telo i najviše utiču na vremenske prilike na našoj planeti. Zbog toga je fizika fluida izuzetno važna za bolje razumevanje mnogih pojava u prirodi i za primenu fluida u tehnologiji.

Kada fluidi miruju, odnosno kada miruju u ravnoteži, opisuju se statikom fluida (hidrostatikom). Kao i u ostalim problemima u mehanici statika je zasnovana na Njutnovim zakonima (prvom i trećem). U okviru statike biće analiziran koncept gustine, pritiska i potiska. Fluidi u pokretu se proučavaju u okviru dinamike fluida (hidrodinamike). Problem kretanja fluida je vrlo složen, i verovatno spada u najteže probleme u okviru mehanike. Ipak, u jednostavnim slučajevima primenljivi su modeli i aproksimacije koji mogu da posluže da se stekne prilično opšta slika o situacijama koje se mogu javiti pri kretanju fluida.

Fluidi i gustina

Fluidi su gasovi i tečnosti. Oni imaju mnogo sličnosti, ali osnovna razlika je u tome što je u tečnostima interakcija između molekula mnogo jača nego u gasovima (takozvane kohezivne sile). Zbog jače interakcije molekuli se privlače i tečnosti pri istim uslovima ne menjaju zapreminu ako se presipaju iz jednog u drugi sud. Druga posledica jačih sila je da tečnosti imaju graničnu površ, granicu koja ih razdvaja od okoline (atmosfera). Gasovi, sa druge strane, uvek zauzimaju celu zapreminu suda u kome se nalaze i ne postoji površ koja razdvaja gas od okoline (drugih gasova u atmosferi).

GUSTINA SUPSTANCE je važna osobina čija je mera fizička veličina, *gustina*, koja je jednaka masi jedinične zapremine supstance:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.1)$$

Homogenim materijalima je gustina ista u svakom delu materijala. Gustina je karakteristika supstance, ne zavisi od oblika, mase ili zapremine tela, već samo od količnika mase i zapremine tela.

Gustina nekih materijala može da se menja od mesta do mesta u telu. Na primer, telo nekog sisara sadrži kosti (gustine od 1700-2500

Neke savremenije definicije fluida definišu na osnovu reakcije sistema na spoljašnju silu (sile). Bez ulaska u detalje koji prevazilaze potreban nivo ovog kursa evo kratkog primera. Čep od plute pluta (miruje) na površini vode. Ako želimo da pomerimo čep sa mesta dovoljno je da delujemo nekom silom, koja ima komponentu paralelnu površi vode. Koliko god da je mala sila čep će se pomeriti. Ne postoji minimalna sila koja je potrebna za pomeranje. Ako isti čep stoji na čvrstoj podlozi da bismo savladali silu trenja potrebno je da na njega delujemo silom koja je veća od minimalne.

kg/m^3), mnogo vode (gustine 1000 kg/m^3), vazduh u plućima (oko 1.2 kg/m^3), mišići (1060 kg/m^3), masno tkivo (940 kg/m^3). Gustina tela neke životinje će očigledno zavisiti od sastava tela. Materijali čija gustina nije ista u svakoj tački nazivaju se nehomogenim materijalima (sistemima). U nehomogenom slučaju jednačina 1.1 daje *srednju gustinu* tela.

Gustina supstance, u opštem slučaju, zavisi od uticaja okoline, kao na primer pritiska i temperature.

Pritisak u fluidu

Fluid koji se nalazi u sudu deluje silom na zidove suda, normalno na njih, kao i na telo koje je zaronjeno u fluid. Čak i kada fluid miruje molekuli se kreću i sudaraju sa svim preprekama. Posledica tih sudara je sila kojom fluid deluje na prepreke. Zamislite neku površ zaronjenu u fluid koji miruje. Ako fluid miruje onda mora da miruje i bilo koji njegov makroskopski deo, pa samim tim i zamišljena površ zaronjena u njega. Kada površ miruje onda su sile koje deluju na nju sa obe strane jednake. Jednakost sila sa obe strane mora da važi i za bilo kakav mali deo površi, dS . Neka je normalna komponenta sile koja deluje na dS sa obe strane dF_n . Onda se može definisati pritisak kao normalna sila po jedinici površine:

$$p = \frac{dF_n}{dS} \quad (1.2)$$

Ako je pritisak na svaku tačku površi isti onda je:

$$p = \frac{F_n}{S}, \quad (1.3)$$

gde je F_n komponenta rezultujuće sile normalna na površ, površine S . Merna jedinica za pritisak je $\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$ (paskal).

Ostale merne jedinice za pritisak koje se često koriste su $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$, $1 \text{ mbar} = 100 \text{ Pa}$, $1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$, $1 \text{ Torr} = 133.3 \text{ Pa}$ (po Evangelisti Toričeliju), 1 mmHg , milimetar živinog stuba.

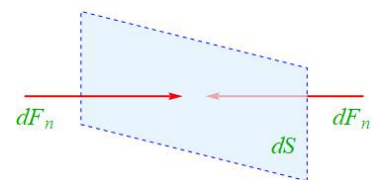
ATMOSFERSKI PRITISAK je pritisak vazduha u Zemljinoj atmosferi. Atmosferski pritisak zavisi od temperature i od nadmorske visine, kao i još nekih vremenskih prilika. Srednja vrednost atmosferskog pritiska na nivou mora je 101325 Pa (jedna atmosfera) ili približno 10^5 Pa .

Osnovna jednačina hidrostatičke

Ako fluid globalno miruje, onda se može pretpostaviti i da svaki deo fluida makroskopski miruje, odnosno da je u ravnoteži. Neka delić fluida ima oblik malog i tankog cilindra, čija je osa paralelna x osi, dužine dx , i površine poprečnog preseka dS . Cilindar je dovoljno tanak da se može uzeti da je pritisak isti na celoj površi dS , a da unutar cilindra pritisak može da zavisi jedino od x -koordinate, slika 1.2.

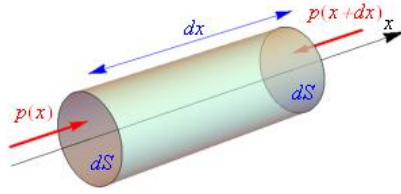
Tabela 1.1: Gustine nekih supstanci u prirodi. Gustine gasova (*) su date pri normalnim uslovima. Normalni uslovi odgovaraju temperaturi od $T = 273.15 \text{ K}$ i pritisku od jedne atmosfere, $p = 10^5 \text{ Pa}$.

Supstanca	Gustina $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Neutronska zvezda	10^{18}
Beli patuljak	10^{10}
Osmijum	22500
Platina	21400
Zlato	19300
Živa	13600
Olovo	11300
Srebro	10500
Bakar	8900
Gvožđe	7800
Aluminijum	2700
Beton	2000
Krv	1060
Morska voda	1030
Voda	1000
Led	920
Etanol	810
Ugljen dioksid*	1.97
Vazduh*	1.2



Slika 1.1: Normalna komponenta sile koja deluje na zamišljenu površ.

Vodite računa da iako u definiciju pritiska ulazi sila, pritisak je skalarna veličina. U definiciji je komponenta sile koja se deli površinom, tako da je rezultat skalar.



Slika 1.2: Deo fluida u obliku valjka. Valjak je dovoljno tanak da pritisak fluida unutar njega zavisi samo od rastojanja od osnove valjka.

Neka pritisci na krajevima delića nisu isti. Onda je:

$$(p(x) - p(x + dx)) dS \quad (1.4)$$

ukupna sila kojom fluid u pravcu x ose deluje na uočeni valjak. Sa druge strane je:

$$-p(x) + p(x + dx) = dp \Big|_{\substack{y=const \\ z=const \\ t=const}} \quad (1.5)$$

pošto pritisak u opštem slučaju zavisi i od ostalih koordinata. Dalje je:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx. \quad (1.6)$$

Tada izraz za silu 1.4 postaje:

$$-dp dS = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dS = -\frac{\partial p}{\partial x} dV = s_x dV. \quad (1.7)$$

Iz dimenzione analize je jasno da su parcijalni izvodi pritiska (odnosno s_x) jednaki sili u jedinici zapremine, odnosno komponentama *gustine sile*. Gustina sile je sila koja deluje na jedinicu zapremine i time dovodi do promene pritiska. Gustina sile zapravo ne zavisi od oblika delića. U opštem slučaju gustina sile je:

$$\mathbf{s} = s_x \mathbf{i} + s_y \mathbf{j} + s_z \mathbf{k}. \quad (1.8)$$

Kada se zamene izrazi za komponente gustine sile, dobija se:

$$\mathbf{s} = -\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} = -\text{grad} p. \quad (1.9)$$

Ako postoji razlika pritisa u fluidu, onda je ona izazvana silom čija je gustina jednaka gradijentu pritiska.

Da bi fluid bio u ravnoteži ako u njemu postoji razlika pritisa, onda na njega mora da deluje neka spoljašnja sila koja će da poništi delovanje unutrašnje sile pritiska, odnosno:

$$\text{grad} p = \mathbf{f}, \quad (1.10)$$

gde je $\mathbf{f}$ gustina spoljašnje sile. Jednačina 1.10 je osnovna jednačina hidrostatičke. U mehanici je pokazano da se svaka konzervativna sila može izraziti kao gradijent skalarne funkcije (potencijalne energije),

što znači i da se gustina konzervativne sile može izraziti kao gradijent neke skalarne funkcije. Na osnovu ovog podsećanja može da se zaključi da ako je potrebno da spoljašnja sila uravnoteži fluid, to može da bude samo konzervativna sila. Direktna posledica je da ako na fluid deluje nekonzervativna sila on ne može da bude u ravnoteži.

Drugi važan zaključak je i da ako na fluid deluje spoljašnja konzervativna sila pojavice se gradijent pritiska koji će održati ravnotežu.

Još jedna posledica osnovne jednačine hidrostatičke je da ako na fluid ne deluje spoljašnja sila, onda da bi on bio u ravnoteži gradijent pritiska mora da bude jednak nuli, odnosno:

$$\text{grad} p = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (1.11)$$

Ako pritisak ne zavisi ni od jedne promenljive (koordinate), odnosno ako ne zavisi od položaja u fluidu, onda je on isti u svim pravcima. Ovo je zapravo Paskalov zakon za fluid na koji ne deluju nikakve spoljašnje sile.

Pritisak fluida u gravitacionom polju

Neka se fluid nalazi u homogenom gravitacionom polju, na primer u polju Zemljine teže. Onda je gustina spoljašnje sile $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$, gde je $\mathbf{g}$ gravitaciono ubrzanje. Neka je koordinatni sistem takav da je $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$.

Na osnovu osnovne jednačine hidrostatičke sledi da je samo z -komponenta gradijenta pritiska različita od nule. Odnosno:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (1.12)$$

Pošto pritisak zavisi samo od z -koordinate onda se parcijalni izvod može zameniti totalnim izvodom:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (1.13)$$

Integraljenjem ove jednačine se dobija zavisnost pritiska od visine (z). Potrebno je zadati i jedan granični uslov, najčešće pritisak na površini ($z = 0$). Ipak, jednačina se lako integriše samo ako je gustina fluida konstantna, odnosno ako je fluid nestišljiv. Gustina tečnosti se uglavnom može uzeti da je konstantna, dok sa gasovima to nije slučaj. Zanimljivo je da će pretpostavka da je gustina vazduha konstantna dati dosta grubu, ali sasvim prihvatljivu aproksimaciju za zavisnost pritiska od nadmorske visine na površini Zemlje, analiziranu u primeru 3.3.

Ista jednačina je primenljiva i za nalaženje zavisnosti pritiska vode od dubine. Podesnije je uzeti z -osu usmerenu od površine vode naniže. Tada je $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_z$, pa je jednačina 1.13:

$$\frac{dp}{dz} = \rho g. \quad (1.14)$$

S obzirom da je voda vrlo slabo stišljiva tečnost može se uzeti da joj je gustina konstantna. Ako je pritisak na površini vode jednak p_0 ,

Gasovi ne spadaju u nestišljive fluide, pošto im se gustina značajno menja sa promenom pritiska. Na primer gustina vazduha na Mont Everestu je skoro tri puta manja od gustine na nivou mora.

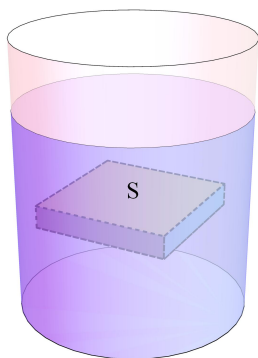
onda je pritisak na dubini h :

$$p(h) = p_0 + \rho gh, \quad (1.15)$$

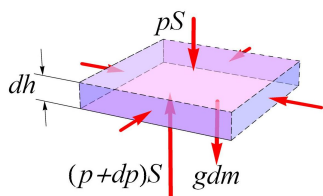
što je poznati izraz za *hidrostatički pritisak*.

Primer 1.1

Hidrostatički pritisak – jednostavniji pogled



U nekoj posudi se nalazi fluid konstantne gustine. Ako fluid miruje, onda miruje i svaki njegov deo. Uočimo delić fluida, debljine dh i neka je površina gornje i donje površi jednaka S . Pošto je i svaki delić fluida u ravnoteži onda je rezultujuća sila koja deluje na njega jednaka nuli. Sa svih strana na delić deluju sile pritiska okolnog fluida, kao i gravitaciona sila. Sve sile pritiska koje deluju u horizontalnoj ravni se sabiraju u nulu. Sa druge strane, pritisak fluida na gornju površ delića ne može da bude jednak pritisku na donju površ, zbog težine delića fluida. Neka je vertikalna osa usmerena naniže. Razlika pritiska na gornju i donju površ delića fluida je jednaka težini obuhvaćenog fluida:



$$(p + dp)S - pS = \rho g S dh,$$

odakle je:

$$\frac{dp}{dh} = \rho g,$$

$$\text{odnosno } dp = \rho g dh, \quad p(h) = p(0) + \rho gh.$$

Izraz za hidrostatički pritisak u sebi sadrži jednu vrlo važnu posledicu. Nigde u izrazu 1.15 ne figuriše ništa što definiše oblik suda ili njegove dimenzije. Dakle, pritisak tečnosti na istoj dubini je isti u celom fluidu, kakav god da je oblik suda. Posledica je *zakon spojenih sudova*.

Neka je tečnost u sudu kao na slici 1.3. Sud ima četiri otvorene cevi koje su spojene na dnu. U sud je sipan fluid. Bez obzira na debljinu i oblik cevi nivo fluida u svim vertikalnim cevima je isti zato što je u pitanju isti sud, i vertikalne cevi su spojene preko horizontalnog dna.

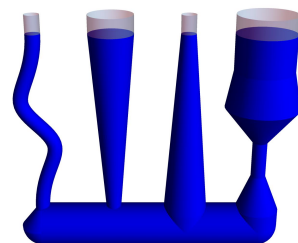
Ako se poveća pritisak na površinu fluida, nekim klipom na primer lako se vidi iz izraza za hidrostatički pritisak da će se na svakoj dubini pritisak povećati za istu vrednost. Ovo je još jedan oblik Paskalovog zakona: Spoljašnji pritisak koji deluje na zatvorene fluide prenosi se podjednako u svim pravcima.

U sudu sa slike 1.4 se nalazi fluid ispod dva klipa. Klipovi su različitih površina. Neka na klip manje površine deluje sila, F_1 , kao na slici. Zbog delovanja sile na klip pritisak fluida ispod klipa se povećava. Po Paskalovom zakonu pritisak će se povećati u celom fluidu, pa i pritisak na drugi klip. Zbog toga što je drugi klip veće površine sila kojom fluid deluje na veći klip će biti veća od sile koja pritiska manji klip:

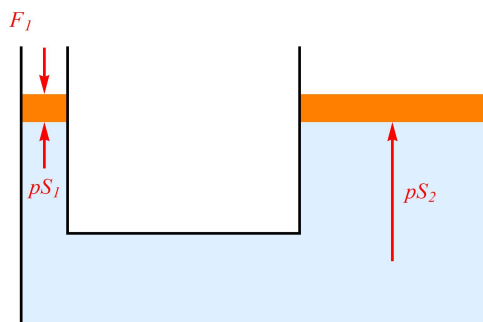
$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2},$$

odnosno

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1. \quad (1.16)$$

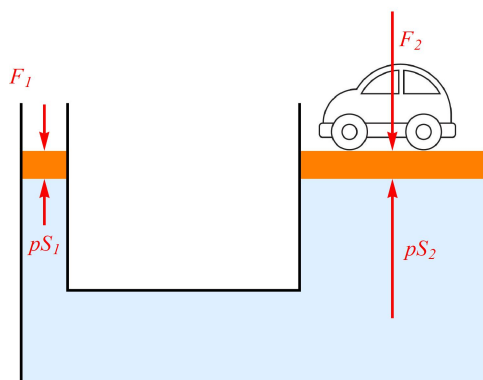


Slika 1.3: Spojeni sudovi. Visine tečnosti u svim cevima su jednake, ne zavise od oblika i prečnika suda.



Slika 1.4: Sud sa dva klipa. Kada su klipovi na istoj visini pritisci fluida ispod oba klipa su jednaki.

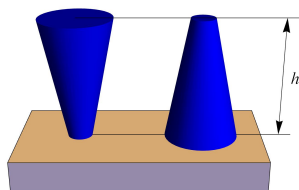
Jasno je da ako su površine poprečnih preseka delova suda mnogo različite onda su i intenziteti sila bitno različiti. Na principu Paskalovog zakona su konstruisane razne hidraulične mašine, zubarske stolice i slično.



Slika 1.5: Hidraulična dizalica. Ako se na jedan klip deluje silom F_1 onda će drugi klip moći da savlada silu F_2 , a da bude u ravnoteži.

Primer 1.2

Hidrostatički paradoks



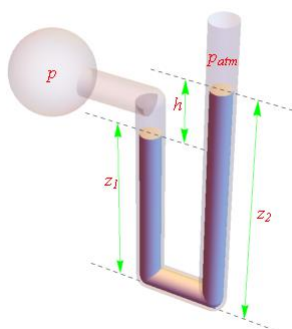
Dva suda oba oblika zarubljene kupe, iste visine i iste zapremine, su do vrha napunjeni vodom, i postavljeni kao na slici. Dna sudova imaju različite površine. Pritisak vode na dno suda je isti u oba suda jer zavisi samo od visine vodenog stuba. Sila kojom sud deluje na podlogu je proizvod pritiska i površine. Onda su sile kojima ova dva suda deluju na podlogu različite, pa bi onda kada bi ih postavili na vagu pokazivale različite mase. Ali kada ih stavimo na vagu pokazuju iste mase. Kako je to moguće? Objasnite.

Apsolutni i relativni pritisak

Kada se kaže da je pritisak u automobilskim gumama dve atmosfere, to znači da je on za dve atmosfere veći od spoljašnjeg pritiska. Pritisak u gumama je dat u odnosu na atmosferski pritisak okoline. Ovo je definicija *relativnog pritiska* (diferencijalni ili gejdž pritisak). Nezavisno od okoline pritisak u gumama je tri atmosfere, i ovo je *apsolutni pritisak*.

Uređaj za merenje pritiska se zove manometar, i uglavnom meri relativni pritisak, kao što se može videti u naredna dva primera.

Primer 1.3 Manometar



Sistem se sastoji od posude u kojoj je gas na nekom pritisku. Sud se nastavlja na cev u kojoj se nalazi živa, i kraj cevi je otvoren. Gas iz suda pritiska živu i zbog toga postoji razlika u visinama stubova žive u dva kraja suda. Po Paskalovom zakonu pritisak na visini z_1 je sa jedne strane jednak pritisku gasa u sudu, a sa druge zbiru atmosferskog pritiska i hidrostatskog pritiska žive:

$$p = p_{atm} + \rho g(z_2 - z_1)$$

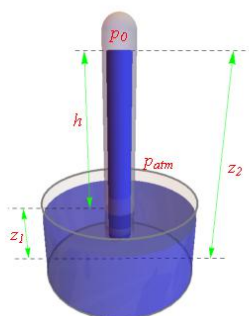
$$p - p_{atm} = \rho gh,$$

gde je ρ gustina žive.

Pritisak se često meri u odnosu na atmosferski. Za merenje atmosferskog pritiska bilo potrebno smisliti poseban metod. Prvi koji je izmerio atmosferski pritisak je italijanski naučnik Evangelista Toričelli, koji je za tu potrebu napravio živin manometar.

Živin manometar nije sasvim pouzdan zato što gustina žive zavisi od temperature, a i ubrzanje Zemljine teže zavisi od nadmorske visine.

Primer 1.4 Torčelijev manometar



Sistem se sastoji od duge cevi i posude. U cev i posudu je sipana živa. Zatim je cev okrenuta naopako i zaronjena u posudu. Na vrhu cevi će se nivo žive spustiti i ostaće malo praznog prostora. Neka je pritisak gasa u tom delu cevi p_0 . Po Paskalovom zakonu pritisak na površini žive u sudu je sa jedne strane jednak atmosferskom pritisku, a sa druge strane jednak je zbiru hidrostatskog pritiska žive i pritiska p_0 .

$$p_a = \rho g(z_2 - z_1) + p_0.$$

Neka je $z_2 - z_1 = h$. Pritisak p_0 je mnogo manji od hidrostatskog pritiska žive, pa se može zanemariti. Tada je atmosferski pritisak proporcionalan visini živinog stuba u cevi manometra:

$$p_a = \rho gh.$$

Živin manometar daje smisao mernoj jedinici za pritisak, milimetar živinog stuba.

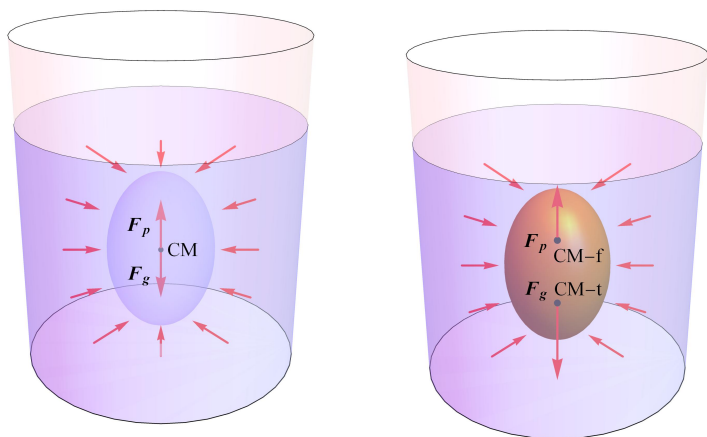
Merač krvnog pritiska meri najveći i najmanji pritisak krvi u arterijama, ali rezultat zavisi od visine merača u odnosu na srce.

Potisak

Potisak je pojava da telo zaronjeno u fluid ima manju težinu nego u vazduhu. Zbog potiska telo koje ima manju gustinu od fluida pliva na površini fluida (drvo u vodi, balon sa toplim vazduhom u vazduhu...).

Kada je neko telo potopljeno ili zaronjeno u fluid, fluid na njega deluje silom naviše, koja je brojno jednaka težini telom istisnute tečnosti. Ovo je poznati *Arhimedov zakon*.

Da bi se bolje shvatilo šta je potisak i šta se dešava sa telom koje je zaronjeno u fluid, prvo je potrebno zamisliti deo fluida koji ima isti oblik i zapreminu kao i telo. Fluid miruje, pa tako i svaki njegov deo



Slika 1.6: Potisak. Zamišljeni deo fluida je u ravnoteži. Ravnotežu omogućava sila potiska (slika levo). Na telo potpuno potopljeno u tečnost deluje ista sila potiska kao na deo fluida na slici levo.

miruje. Zamišljeni deo je u ravnoteži, jer je rezultujuća sila jednaka nuli.

Iz uslova ravnoteže je jasno da će sve horizontalne komponente sila pritiska da se potru (saberu u nulu). Vertikalno naniže deluje gravitaciona sila na deo fluida. Da bi zamišljeni deo fluida bio u ravnoteži na njega mora da deluje sila usmerena vertikalno naviše, čiji je intenzitet jednak gravitacionoj sili. Ova vertikalna sila je posledica potiska i naziva se *sila potiska*.

Sila potiska je po intenzitetu jednaka težini fluida u zamišljenom delu:

$$F_p = m_f g = \rho_f V_f g,$$

gde je m_f masa fluida, ρ_f gustina fluida i V_f zapremina zamišljenog dela fluida.

Činjenica da je zamišljeni deo fluida u ravnoteži znači i da je ukupan moment sila koje deluju na deo jednak nuli, a to znači da i sila potiska deluje na centar mase dela fluida.

Sada u fluid potopimo telo. Telo će samim tim istisnuti deo fluida. Zbog toga, kako smo prethodno izabrali oblik dela fluida, svi zaključci vezani za pritisak i silu potiska ostaju isti. Na telo će delovati sila potiska vertikalno naviše, koja je po intenzitetu jednaka težini istisnute tečnosti (Arhimedov zakon):

$$F_p = \rho_f V_f g.$$

Na telo će delovati i gravitaciona sila:

$$F_g = m_t g = \rho_t V_t g,$$

gde je m_t masa tela, ρ_t gustina i V_t zapremina tela.

Potopljeno telo ne mora da bude u ravnoteži, tako da je rezultujuća sila koja deluje na telo:

$$F_{rez} = (\rho_t - \rho_f) V g.$$

U zavisnosti od toga kolike su gustine tela i fluida moguća su tri slučaja:

- $\rho_t > \rho_f$, telo tone u fluidu;

- $\rho_t < \rho_f$, telo isplivava iz fluida;
- $\rho_t = \rho_f$, telo ostaje na onoj dubini u fluidu na kojoj ga ostavimo, odnosno lebdi u fluidu.

Za telo koje ima veću gustinu od gustine fluida, zbog sile potiska koja deluje vertikalno naviše, kažemo da kada ga zaronimo u fluid ono (prividno) gubi od svoje težine.

Pored toga treba voditi računa i o napadnim tačkama sile potiska i gravitacione sile. Napadna tačka gravitacione sile je centar mase tela, dok je napadna tačka sile potiska centar mase dela fluida koji ima isti oblik kao i telo. Ove dve tačke se u opštem slučaju ne poklapaju.

Kao što je već pomenuto, telo može da pliva po površini nekog fluida samo ako mu je gustina manja od gustine vode. Tada je sila potiska koja deluje na telo veća od težine i telo isplivava na površinu.

Koliko će telo isplivati zavisi od odnosa gustine tela i gustine fluida. Kada se uspostavi ravnoteža gravitacione i sile potiska telo će se umiriti na površini. Vodite računa da je sila potiska, koja deluje na telo koje pliva, proporcionalna zapremini dela tela koji je potopljen, a ne celoj zapremini tela.

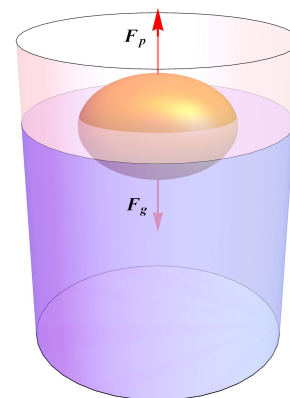
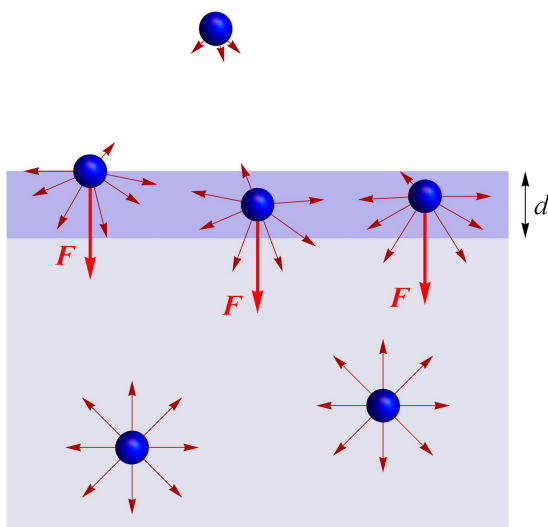
$$F_p = \rho_f V_f g, \quad mg = \rho_t V_t g.$$

U stanju ravnoteže na površini fluida je:

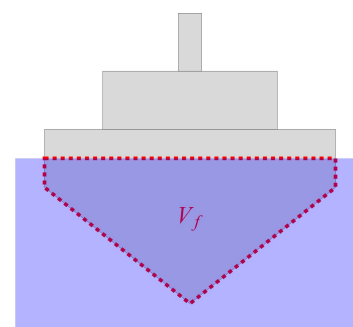
$$\rho_f V_f = \rho_t V_t.$$

Površinski napon

Površinski sloj tečnosti se nalazi u posebnim uslovima. Na molekule u površinskom sloju debljine koja je približno jednaka dometu međumolekulskih sila ($d = 10^{-9}$ m) deluju sile koje ih privlače u dubinu fluida.



Slika 1.7: Telo koje pliva u fluidu. Samo deo tela je potopljen u fluid.

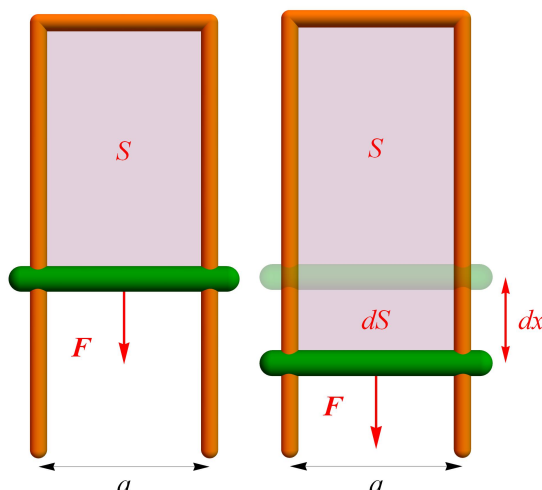


Slika 1.8: Brod u vodi. Sila potiska je proporcionalna zapremini dela broda koji je u vodi, V_f .

Slika 1.9: Shematski prikaz interakcije molekula u tečnosti. Rezultujuća sila na molekule u površinskom sloju je usmerena ka unutrašnjosti tečnosti.

Na bilo koji molekul koji se nalazi u unutrašnjosti fluida deluju okolni molekuli privlačnim silama. Zbog mnoštva molekula rezultujuća sila koja deluje na svaki molekul u unutrašnjosti je jednaka nuli (slika 1.9). Za razliku od unutrašnjosti, na molekule u površinskom sloju deluju samo molekuli koji su sa strane ili ispod njih. Molekuli sa površine mnogo slabije interaguju sa molekulima vazduha, tako da rezultujuća sila nije jednaka nuli, već je usmerena ka dubini (F na slici 1.9). Zbog ove sile površina fluida se ponaša kao elastična membrana.

Molekuli iz unutrašnjosti tečnosti, da bi stigli u površinski sloj moraju da savladaju i silu koja potiče od površinskih molekula, odnosno vrše rad protiv tih sila i povećavaju potencijalnu energiju, tako da molekuli na površini fluida imaju i dodatnu potencijalnu energiju. Tečnost teži da smanji potencijalnu energiju, a samim tim i graničnu površinu. Težnja granične površi da smanji svoju površinu se manifestuje tako što se javljaju sile površinskog napona koje su tangencijalne na površ.



Slika 1.10: Shematski prikaz ogleda sa mehurom od sapunice i ramom.

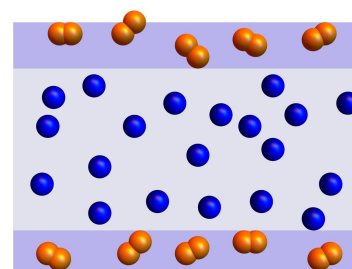
Pravac i smer sile površinskog napona se može pokazati u jednostavnom ogledu. Shema ogleda je prikazana na slici 1.10. Mehur od sapunice je razapet na žičanom ramu. Jedan kraj rama je pokretan i na njega može da deluje sila. Neka se taj pokretni kraj rama lagano pomeri za dx , pod dejstvom sile F . Pri tome je sila izvršila rad $dA = 2Fdx$. Dvojka je u jednačini zato što mehur ima dve granične površi, gornju i donju, kao što je prikazano na slici 1.11. Prilikom rastezanja mehura površina granične površi se poveća za $dS = 2adx$, gde je a širina rama (vidi sliku 1.10).

Iz teorije elastičnosti je poznato da rad na povećanju elastične površi proporcionalan površinskom naponu, odnosno $dA = \sigma dS$. Tada je:

$$dA = \sigma dS = 2\sigma adx = 2Fdx,$$

što znači da je koeficijent površinskog napona

$$\sigma = \frac{F}{a},$$



Slika 1.11: Poprečni (bočni) presek tankog filma od sapunice. Zlatne kuglice predstavljaju molekule sapunice na graničnim površinama, dok su plave kuglice molekuli vode u unutrašnjosti filma.

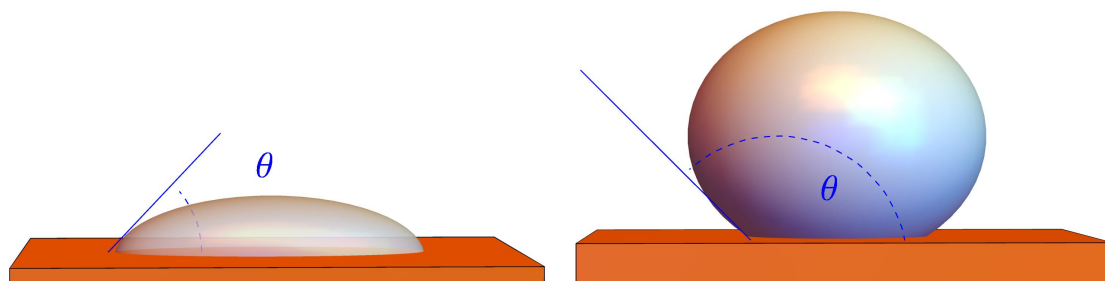
jednak sili po jedinici dužine. Sa druge strane, iz ovoga se vidi da je granična površ tečnosti uvek zategnuta.

Na prvi pogled površina tečnosti se ponaša kao elastična membrana, ali to nije sasvim tačno. Ako bismo istezali elastičnu, na primer gumenu membranu, sila bi bila proporcionalna veličini istezanja. Na mikro planu povećavalo bi se rastojanje između molekula, i bilo bi potrebno primeniti sve veću i veću silu kako se istezanje povećava. Sa druge strane, sila kojom rastežemo površ tečnosti je uvek ista, uvek je jednaka proizvodu koeficijenta površinskog napona i dužine granice površi. Na mikro planu, pri rastezanju molekuli tečnosti iz unutrašnjosti se premeštaju u površinski sloj i, u srednjem, nema povećavanja međumolekulskih rastojanja, pa samim tim sila ne zavisi od toga da li je površ rastegnuta ili nije.

Iako je pri opisu površinskog sloja uzeto da molekuli tečnosti slabo interaguju sa molekulima iz atmosfere, ipak površinski napon zavisi i od sredine sa kojom se tečnost graniči. Ovo će biti posebno važno za opisivanje kapilarnih pojava i kvašenja.

Kvašenje i kapilarne pojave

Činjenica da površinski napon zavisi od vrste tečnosti, ali i od sredine u kojoj se tečnost nalazi, dovodi do važnih efekata. Kap neke tečnosti se nalazi na čvrstoj podlozi. U zavisnosti od toga koja tečnost je u pitanju, kakva je podloga i u kakvoj atmosferi se sve nalazi moguća su dva slučaja prikazana na slikama 1.12.



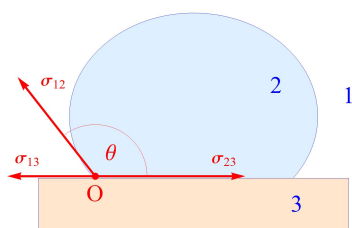
Kada se kap delimično razlije po čvrstoj podlozi, i kada na granici kapi i podloge tangenta na površ kapi zaklapa oštar ugao (θ) sa podlogom, kaže se da tečnost kvasi supstancu od koje je napravljena podloga. U drugom slučaju sile površinskog napona su dovoljno jake da kap zadrži oblik blizak sfernom. Tada je ugao θ tup, i kaže se da tečnost ne kvasi podlogu. Ugao θ se naziva uglom kvašenja.

Činjenica da se granična površ tečnosti ponaša kao membrana omogućava, na primer, nekim telima da plivaju na površini vode i ako im je gustina veća od gustine vode. Čeličnu iglu možemo pažljivo postaviti na površinu vode i ona neće potonuti. Slično tome mnogi insekti mogu da hodaju po vodi a da ne potonu. Potpuno spektakularan primer ove vrste je trčanje guštera basiliska po vodi.

Neki materijali, kao sapunica ili deterđent na primer, mogu značajno da smanje površinski napon. Zbog toga u vodi sa sapunicom tečnost može da uđe i u najtanje kanale i da tako odlepi prljavštinu.

Kapljice vode u bestežinskom stanju su sfernog oblika. Kapi kiše malo odstupaju od sfernog oblika zbog delovanja gravitacione sile. Sa druge strane kada se kapljica tečnosti ubaci u tečnost slične gustine, ona će imati sferni oblik. Površ rastvora neće samo težiti da smanji površinu. U površinskom sloju će se naći molekuli koji imaju manji koeficijent površinskog napona, jer će tako smanjiti potencijalnu energiju. Dobar primer je rastvor sapunice i vode. Površ čine skoro isključivo molekuli sapunice dok je u unutrašnjosti voda.

Slika 1.12: Kap tečnosti na čvrstoj podlozi. Kap levo kvasi podlogu (ugao kvašenja je oštar) a kap desno ne kvasi podlogu (ugao kvašenja je tup).

Primer 1.5**Kapljica na podlozi – dodatak**

Kapljica tečnosti (2 na slici) se nalazi na čvrstoj podlozi (3), a sve se nalazi u istoj atmosferi (1). Zbog kontakta različitih supstanci postojeće površinski naponi na svim granicama. Ovde ih ima tri, podloga-kap (2-3), podloga-atmosfera (1-3) i kapljica-atmosfera (1-2). Svaki od odgovarajućih površinskih napona je označen odgovarajućim indeksima, σ_{23} , σ_{13} i σ_{12} , respektivno. Da bi granična površ kapljice bila u ravnoteži potrebno je da sile površinskih napona budu u ravnoteži.

Sile su proporcionalne sa naponima, zato su na slici označeni naponi i smerovi delovanja sile. Prikazane su sile koje deluju na graničnu liniju koja je normalna na ravan papira, i prolazi kroz tačku O. Za stabilnost površi kapljice je važan odnos horizontalnih projekcija sile, pošto vertikalne projekcije moraju biti uravnotežene sa težinom i silom reakcije podloge. Sa slike sledi da je u ravnoteži:

$$\sigma_{12} \cos(\pi - \theta) + \sigma_{13} = \sigma_{23},$$

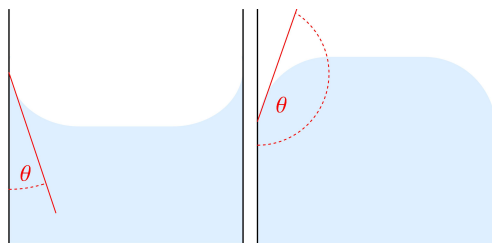
$$\cos \theta = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{23}}{\sigma_{12}},$$

gde je θ ugao kvašenja. Iz ovog izraza se vidi da ugao kvašenja, koji pokazuje da li tečnost kvasi neki materijal ili ne, zavisi od interakcije sve tri sredine od značaja, tečnosti, zida suda i gasa u atmosferi.

Voda ne kvasi podlogu prevučenu parafinom, kao što ni živa ne kvasi staklenu podlogu. Zato su im kapljice na ovim podlogama skoro savršene loptice.

Druga važna manifestacija kvašenja je oblik granične površine tečnosti u, posebno uskim, sudovima.

Čelična igla pliva na površini vode pre svega zbog toga što voda ne kvasi čelik.



Slika 1.13: Tečnost koja kvasi (slika levo) i koja ne kvasi zidove suda (slika desno).

Površina tečnosti koja kvasi materijal od koga je načinjen sud je konveksna (izdubljena), dok je površina tečnosti koja ne kvasi sud konkavna (ispupčena), slika 1.13. Ono što je svakako važno, bilo da tečnost kvasi ili ne kvasi sud, granična površina je zakrivljena.

Primer 1.6**Efekat lotosa**

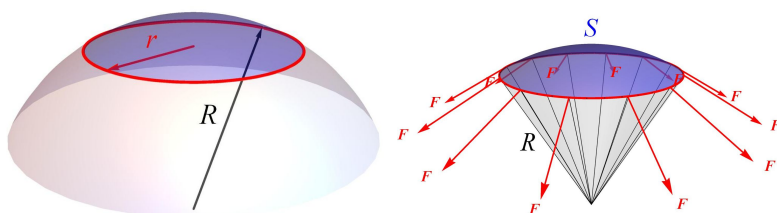
(<https://www.surfacetechology.co.uk>)

Površni koje voda ne kvasi se nazivaju *hidrofobne*, a one koje kvasi *hidrofilne*. Među svim hidrofobnim površima posebno su zanimljive one kod kojih je ugao kvašenja vrlo blizu 180° , one se nazivaju ultrahidrofobne. U prirodi ima mnogo takvih površi, a jedna od najpoznatijih je površ lista lotusa. Ugao kvašenja za vodu na listu lotusa je oko 170° . Kontaktna površina kapljice vode koja stoji na listu lotosa je samo oko 0.6 % površine kapljice. Tu nije kraj zanimljivostima. Zbog toga što kapljice vode ostaju u obliku kuglica na površi lotusa, one su vrlo lako pokretne, kotrljaju se. Tako kotrljajući se po listu one lako pokupe bilo kakve čestice koje im se nađu na putu.

Zbog toga se kaže da je površ lotosa „samočisteća“. Skoro sva prljavština sa lista bude sprana kotrljajućim kapljicama vode.

Lotosov list je bio inspiracija za sintetisanje mnoštva materijala koji ne upijaju vodu, a neki od njih su i samočisteći, koji imaju široku primenu, od jakni za kišu do svemirskih odela. Ovakve površi u biljnom svetu imaju značajnu ulogu za odbranu od buđi, raznih parazita i drugih štetnih organizama. Krila leptira i vilinog konjica su takođe prekrivena ultrahidrofobnim slojem.

Zakrivljena granična površ je razlog zašto je pritisak ispod granične površi različit od slučaja kada površ nije zakrivljena. Sile površinskog napona koje teže da umanje površinu granice mogu da povećaju ili smanje pritisak ispod granične površi fluida.

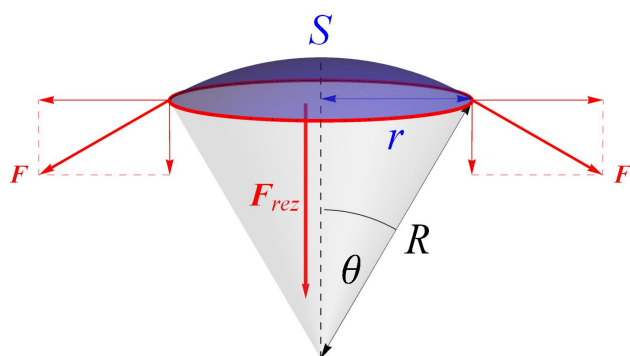


Slika 1.14: Kalota kao granična površ. Sile koje deluju na granicu su tangencijalne na površ i normalne na granicu.

Neka je, na primer, granica deo sfere (kalota) poluprečnika R , slika 1.14. Kao što je pokazano na primeru mehura od sapunice na ramu, sile površinskog napona su tangencijalne na graničnu površ i normalne na graničnu liniju. U slučaju kalote granična linija je kružnica poluprečnika r . Ako se granična površ zamisli kao platno otvorenog kišobrana, onda su sile usmerene kao žice koje vire iz platna.

Ukupna sila površinskog napona je jednaka zbiru svih sila koje deluju na graničnoj liniji. Ako se svaka sila razloži na komponentu ka centru sfere i horizontalnu komponentu, jasno je da je zbir svih horizontalnih komponenti jednak nuli, tako da će rezultujuća sila biti usmerena ka centru sfere, kao na slici 1.15. Radijalna komponenta svake sile površinskog napona je $F \sin \theta$.

Sile površinskog napona nisu sile koje deluju na molekule u površinskom sloju fluida prikazane na slici 1.9. Sile na molekule u površinskom sloju su približno normalne na graničnu površ. One izazivaju naprezanje granične površi, odnosno stvaraju površinski napon. Ovaj napon kao rezultat ima sile površinskog napona koje zatežu površ i tangencijalne su na graničnu površ. Povrh toga, one su i normalne na liniju granice granične površi.



Slika 1.15: Sile površinskog napona na graničnu površ, pogled sa strane.

Na osnovu rezultata dobijenog u primeru mehura od sapunice na ramu, intenzitet rezultujuće sile će biti jednak proizvodu koeficijenta površinskog napona i dužine granične linije (kružnice poluprečnika r) $F_{rez} = \sigma 2r\pi \sin \theta$.

Ova sila vrši dodatni pritisak na sredinu ispod krivine:

$$\Delta p = \frac{F_{rez}}{S}.$$

Sa slike se vidi da je $\sin \theta = r/R$. Onda je:

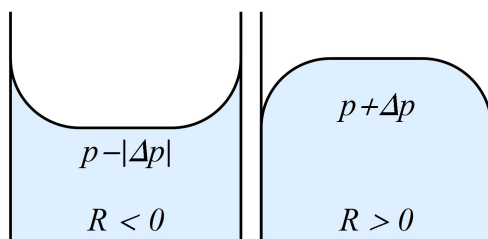
$$\Delta p = \frac{2\pi\sigma r}{RS},$$

gde je S površina kalote. Ako je ugao θ mali, onda se može pokazati da je površina kalote približno jednaka površini kruga poluprečnika r , slika 1.15, odnosno $S = r^2\pi$.

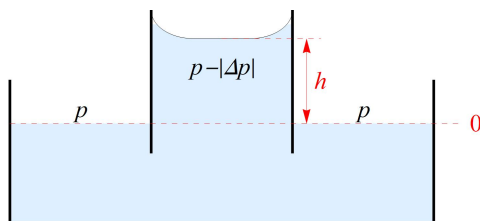
$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}. \quad (1.17)$$

Poluprečnik sfere R se naziva poluprečnikom krivine granične površi. Poluprečnik sfere ima algebarsku vrednost, pozitivan je ako je centar površi u fluidu (konkavna površ) a negativan je ako je centar van fluida (konveksna površ). U slučaju mehura od sapunice $\Delta p = 4\sigma/R$, jer mehur ima dve površi, približno jednakih poluprečnika.

Jasno je da je dodatni pritisak veći što je poluprečnik krivine manji, a to znači da će se efekti najbolje videti u uskim cevima.



Posmatrajmo tečnost u uskom sudu. Zbog zakrivljenosti granične površi javlja se dodatni pritisak Δp . Ako tečnost ne kvasi zid suda (slika 1.16 levo) sile površinskog napona deluju naviše i zbog toga je pritisak ispod površi manji, dok je u slučaju tečnosti koja ne kvasi sud situacija obrnuta, pritisak ispod površi je veći nego što bi bio da nema zakrivljenja.



Ako se tečnost nalazi u uskoj cevi (kapilari) zbog dodatnog pritiska nivo tečnosti u kapilari neće biti isti kao u širem delu suda. Ako tečnost kvasi zidove suda, nivo tečnosti će se podići. Može da se nađe visina nivoa u kapilari u odnosu na nivo tečnosti u širokom delu suda.

Ako granična površ ima potpuno proizvoljan oblik, izraz za dodatni pritisak daje Laplasova formula:

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

gde su R_1 i R_2 glavni poluprečnici krivina površi. Zanimljivo je da je zbir recipročnih vrednosti krivina obrnuto srazmeran harmonijskoj sredini, odnosno srednjoj krivini površi, koja ne zavisi od izbora međusobno normalnih preseka površi.

Slika 1.16: Dodatni pritisak na površi tečnosti u slučajevima kada tečnost kvasi (slika levo) ili ne kvasi zidove suda (slika desno).

Slika 1.17: Podizanje nivoa tečnosti u kapilarnoj cevi zbog dodatnog pritiska.

Na visini na kojoj je nivo tečnosti u širem delu suda (nulti nivo na slici 1.17), pritisak mora da bude isti u celom sudu, pa i u kapilari (Paskalov zakon). Unutar kapilare pritisak na nultom nivou će biti jednak zbiru pritiska ispod površine tečnosti ($p - |\Delta p|$) i hidrostatičkog pritiska tečnosti (ρgh). Sa druge strane, taj pritisak mora da bude jednak pritisku na istom nivou van kapilare, p :

$$p = p - |\Delta p| + \rho gh,$$

odnosno

$$|\Delta p| = \rho gh.$$

Slično se događa u slučaju kada tečnost ne kvasi zidove suda, samo što se tada nivo tečnosti spušta toliko da pritisak na površini tečnosti u kapilari bude jednak pritisku u okolnoj tečnosti na istom tom nivou.

Da li će neka tečnost kvasiti zidove nekog suda ili ne, i ako kvasi koliki će biti ugao kvašenja, ne zavisi samo od tečnosti, već od tečnosti, materijala od kojeg je napravljen sud i od gasa u atmosferi. Tako na primer, ista tečnost može da kvasi zidove jednog suda, a neke druge materijale da ne kvasi, kao što se vidi na slici 1.18.

Dodatni pritisak je obrnuto srazmeran poluprečniku krivine granične površi. Da bi se lakše uočila zavisnost dodatnog pritiska od širine suda, može se poluprečnik krivine granične površi izraziti preko parametara suda i ugla kvašenja.

Na slici 1.19 se vidi da je $R \cos \theta = a$, gde je R poluprečnik krivine granične površi, θ ugao kvašenja i a poluprečnik (cilindričnog) suda. Onda je dodatni pritisak:

$$\Delta p = \frac{2\sigma \cos \theta}{a}.$$

Sada se jasno vidi da, ako imamo istu tečnost u kapilarama od istog materijala, najveći dodatni pritisak će biti u najužoj kapilari, kao što je prikazano na slici 1.20.

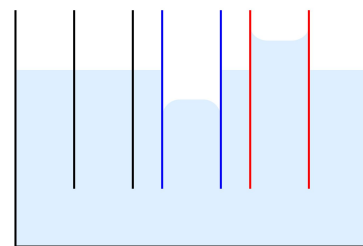
Iz ovih izraza se vidi da je u slučaju kada tečnost ne kvasi zidove suda ugao kvašenja tup, kosinus je negativan i visina će biti negativna, što znači da će se nivo tečnosti u kapilari spustiti. U slučaju kvašenja, nivo se podiže jer je ugao kvašenja oštar.

Primer 1.7

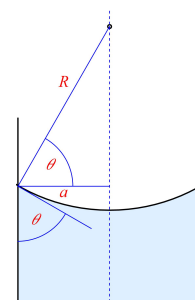
Kapilarne pojave

Za vodu je $\sigma = 0.0728 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$, ugao kvašenja je $\theta = 20^\circ$. Kolika je visina nivoa vode u kapilari?

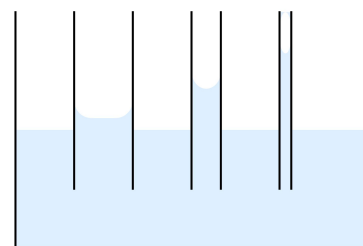
Zamenom podataka u jednačinu za visinu stuba u kapilari dobija se $h \approx \frac{1.4 \times 10^{-5}}{a}$. To znači da će u cevčicama poluprečnika oko jednog mikrona, visina stuba biti preko jedan metar! Na tom efektu se baziraju takozvane kapilarne pojave. Kapilarne pojave su vrlo važne, mada nisu jedine bitne, za način na koji biljke upijaju vodu iz zemljišta.



Slika 1.18: Razlike u nivoima zbog kapilarnog pritiska. Cevi različitih boja su od različitog materijala.



Slika 1.19: Veza između poluprečnika krivine granične površi, ugla kvašenja i poluprečnika kapilare.



Slika 1.20: Zavisnost kapilarnog pritiska od unutrašnjeg prečnika cevi.

Kretanje fluida

Da bi se opisalo kretanje fluida, odnosno sistema sa ogromnim brojem čestica, nije moguće opisivati ga kao kretanje svakog mole-

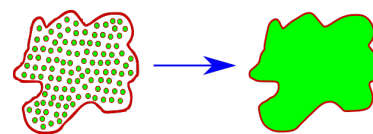
Za neprekidnu sredinu se često koristi termin *kontinuum*.

kula ponaosob. Za najveći broj pojava i problema sasvim je dovoljno uzeti u obzir kretanje molekula u srednjem. To znači da umesto skupa molekula fluida koristimo *neprekidnu sredinu* koja se ponaša kao skup molekula u srednjem.

U ovakvom modelu se umesto brzina molekula u fluidu koristi vektorska funkcija (vektorsko polje) brzine $v(x, y, z, t)$. Umesto toga da znamo brzinu svakog molekula u fluidu, znamo brzinu fluida na određenom mestu i u određenom trenutku. To je vrlo prirodan opis. Na primer, na nekoj reci mi tačno znamo na kom mestu je struja jaka i voda brzo teče, kao što znamo na kojim mestima se voda u reci jedva pomera. Nikada ne znamo, niti je to moguće, kolike su brzine pojedinačnih molekula vode u nekoj reci.

Pri opisivanju kretanja fluida u modelu neprekidne sredine koristi se koncept *delića fluida*. Delić fluida je dovoljno mali da se osobine fluida unutar njega ne menjaju, a istovremeno dovoljno veliki da sadrži veliki broj molekula. I ako je zapremina delića fluida infinitezimalno mala, delić nije tačka, on ima zapreminu (dV) i površinu. Na primer, delić fluida je dovoljno mali da svi njegovi delovi imaju istu brzinu.

Kretanje realnog fluida može da bude krajnje složeno, na primer kretanje nabujale reke, dima upaljenog štapića, ili kretanje plamena. Ali neki jednostavniji slučajevi se mogu opisati jednostavnim modelom.



Slika 1.21: Model neprekidne sredine.

Osnovni pojmovi i modeli fluida

MODEL IDEALNOG FLUIDA: Najjednostavniji model je model *idealnog fluida*. To je fluid koji je *nestišljiv* (ne menja gustinu pri promenama pritiska, $\rho = \text{const}$) i u kome nema unutrašnjeg trenja, odnosno viskoznosti.

Tečnosti su uglavnom nestišljive u brojnim situacijama, a gasovi se mogu takvim smatrati samo ako im se pritisak ne menja mnogo. Viskoznost izaziva smicanje kada se dva susedna sloja fluida kreću jedan u odnosu na drugi, kao i kada fluid protiče kroz cev ili oko neke prepreke. Ponekad se ovo trenje može zanemariti u poređenju sa silama koje nastaju u gravitacionom polju ili usled razlike pritiska.

LINIJA TOKA je putanja jednog delića (ili čestice) fluida tokom kretanja.

STACIONARAN TOK fluida je takvo kretanje fluida pri kojem se ukupni profil toka ne menja tokom vremena. Pri stacionarnom toku svi delići fluida koji prođu kroz istu tačku kreću se po istoj liniji toka. „Mapa“ brzina u različitim tačkama se ne menja tokom vremena, mada brzine pojedinih delića mogu i te kako da se menjaju.

STRUJNA LINIJA je kriva čija je tangenta u svakoj tački duž pravca brzine fluida u toj tački. Kada se profil toka menja tokom vremena strujna linija nije isto što i linija toka. Ako je tok stacionaran onda je

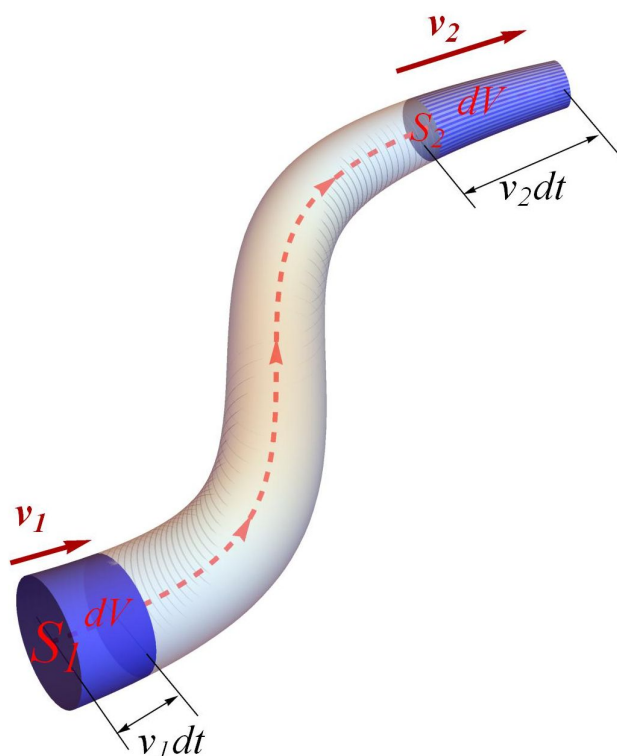
strujna linija isto što i linija toka.

STRUJNU CEV čine strujne linije (u stacionarnom slučaju linije toka) koje prolaze kroz tačke na obodu zamišljene površi (slika 1.22). Ako je tok stacionaran fluid ne može da napusti strujnu cev u kojoj se u jednom trenutku našao, odnosno delovi fluida iz različitih strujnih cevi ne mogu da se mešaju.

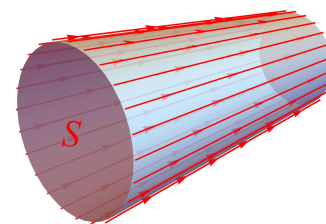
LAMINARAN TOK je tok u kome slojevi fluida glatko klize jedan po drugome, i tok im je stacionaran. Ako je tok neregularan i haotičan, *turbulentan*, onda se profil toka menja kontinuirano. Takav je na primer tok dima sa tek ugašene sveće.

Jednačina kontinuiteta

Masa fluida koji se kreće se ne menja tokom kretanja. Posledica toga je jednačina kontinuiteta. Neka fluid teče stacionarno, onda je za analizu dovoljno uzeti jednu strujnu cev, pošto se delovi fluida obuhvaćeni različitim strujnim cevima ne mešaju.



Neka su u nekom delu strujne cevi uočena dva fiksirana poprečna preseka. Površine ovih poprečnih preseka su S_1 i S_2 , respektivno (slika 1.23). Kroz poprečne preseke protiče fluid brzinama v_1 i v_2 . Neka su zapremine koje proteknu kroz poprečne preseke $dV_1 = S_1 v_1 dt$, odnosno $dV_2 = S_2 v_2 dt$. Ako je fluid nestišljiv ($\rho = \text{const}$) onda su mase koje proteknu kroz poprečne preseke $dm_1 = \rho dV_1$, odnosno



Slika 1.22: Strujnu cev obuhvataju linije toka (crvene linije na slici).

Modeli dinamike fluida koji su bazirani na modelu neprekidne sredine se koriste i van fizike. Na primer za opisivanje gustog saobraćaja u velikim gradovima, kretanja velikog jata insekata, riba ili ptica i slično.

Slika 1.23: Ista zapremina fluida prolazi kroz proizvoljni poprečni presek strujne cevi za isto vreme - jednačina kontinuiteta.

$dm_2 = \rho dV_2$. Pošto je tok stacionaran onda je $dm_1 = dm_2$, odnosno:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad (1.18)$$

što predstavlja *jednačinu kontinuiteta*. Veličina Sv je zapreminski protok fluida:

$$\frac{dV}{dt} = Sv.$$

Jednačina kontinuiteta pokazuje da je protok isti duž cele strujne cevi. Odnosno ako fluid teče stacionarno i nestišljiv je, onda je zapreminski protok konstantan. Drugim rečima, što je površina poprečnog preseka strujne cevi veća to je brzina fluida u tom delu manja i obrnuto.

Ako se protok pomnoži gustinom fluida, dobija se takozvani *maseni protok*. Ako je fluid stišljiv, onda je jednačina kontinuiteta:

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2,$$

odnosno za stišljiv fluid koji stacionarno teče konstantan je maseni protok kroz strujnu cev.

Bernulijeva jednačina

U slučaju kada fluid miruje pritisak u fluidu može da zavisi od dubine, ako je fluid, na primer, u gravitacionom polju. Da li se pritisak u fluidu menja i kada se fluid kreće?

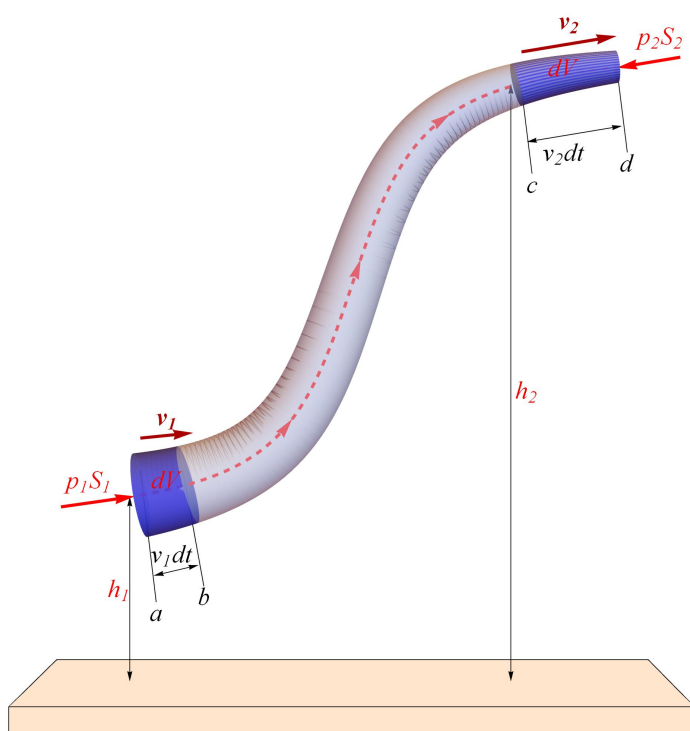
Zamislamo horizontalnu strujnu cev koja na krajevima ima poprečne preseke različitih površina. Iz jednačine kontinuiteta je jasno da će brzine fluida biti različite na mestima tih preseka. Ako su brzine različite, onda fluid ubrzava. Fluid oko strujne cevi deluje na fluid unutar nje tako da prouzrokuje ubrzavanje fluida ako cev nije svuda istog preseka. To dalje znači da pritisci fluida na različitim poprečnim presecima ne mogu biti jednaki, jer da su jednaki ne bi bilo sile koja ubrzava fluid. Ako se fluid kreće kroz strujnu cev koja se sužava, on se kreće ka oblasti sa nižim pritiskom, i ubrzava. Ukoliko strujna cev nije horizontalna, razlika u visinama (dubinama) dodatno utiče na pritiske.

Uočimo strujnu cev, prikazanu na slici 1.24 i deo fluida koji se u nekom trenutku nalazi između dva poprečna preseka a i c , površina S_1 i S_2 . Brzine donjeg i gornjeg dela fluida su v_1 i v_2 . Za kratko vreme, dt , fluid se pomeri tako da tada zauzima prostor između preseka b i d . Na donjem kraju fluid pređe put $v_1 dt$ a na gornjem $v_2 dt$. Neka je fluid nestišljiv, pa je zapremina fluida koji prođe kroz površinu S_1 jednaka zapremini fluida koji prođe kroz S_2 , odnosno $dV = S_1 v_1 dt = S_2 v_2 dt$.

Pošto fluid ubrzava, na njega deluje sila, koja vrši rad. Ako je viskozno trenje zanemarljivo malo, onda pored gravitacione sile jedine koje vrše rad na ubrzavanju fluida su sile pritiska okolnog fluida. Neka su pritisci na krajevima prikazane strujne cevi p_1 i p_2 , onda su sile na krajevima $p_1 S_1$ i $p_2 S_2$. Tada je rad sila pritiska okolnog fluida tokom vremena dt jednak:

$$dA = p_1 S_1 v_1 dt - p_2 S_2 v_2 dt = (p_1 - p_2) dV.$$

Treba voditi računa o jednoj stvari prilikom određivanja strujne cevi. Izbor jednog poprečnog preseka je potpuno proizvoljan. Onda se na osnovu (stacionarnog) kretanja fluida odrede linije toka koje prolaze kroz tačke na obodu izabrane površi. Tako se dobija strujna cev. Ostali poprečni preseki mogu biti samo u okviru tako dobijene strujne cevi, položaj je naravno proizvoljan, ali oblik i površinu određuje oblik strujne cevi, na datom mestu.



Slika 1.24: Deo strujne cevi. Na krajevima dela strujne cevi pritisci okolnog fluida su p_1 i p_2 . Izabrani delići su na različitim visinama u odnosu na neki referentni nivo.

Drugi član ima znak minus jer fluid izlazi iz dela strujne cevi u oblast u kojoj je pritisak p_2 i tamošnji fluid se tome suprotstavlja.

Rad sila pritiska okolnog fluida je jednak promeni ukupne mehaničke energije fluida u cevi. Ukupna mehanička energija fluida u si-vom delu strujne cevi sa slike 1.24 se ne menja, sve dok se ne menjaju pritisci na krajevima strujne cevi. Onda je promena mehaničke ener-gije u celoj cevi (uključujući i tamne delove sa slike) jednaka razlici mehaničkih energija delova fluida koji za vreme dt stignu od preseka a do b , sa jedne, i preseka c do d sa druge strane. Drugim rečima, za vreme dt nešto fluida uđe u strujnu cev, a ista masa istekne iz nje, tako da je promena mehaničke energije fluida u cevi jednaka prome-ni mehaničke energije fluida koji isteče iz cevi i fluida koji uteče u cev za vreme dt . Pošto je masa nekog delića $\rho dV = \rho S v dt$, onda je promena kinetičke energije fluida u cevi:

$$dE_k = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) dV.$$

Promena potencijalne energije za ova dva delića je:

$$dE_p = \rho g (h_2 - h_1) dV.$$

Ukupan rad sila pritiska je jednak promeni mehaničke energije:

$$(p_1 - p_2) dV = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) dV + \rho g (h_2 - h_1) dV,$$

odakle je

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (h_2 - h_1).$$

Dobijeni izraz predstavlja Bernulijevu jednačinu. Iz nje sledi da je rad izvršen na jediničnoj zapremini fluida od strane okolnog fluida jednak promeni kinetičke i potencijalne energije po jedinici zapremine tokom kretanja fluida. Pošto su svi članovi u jednačini po dimenzijama pritisci, ona se može malo preurediti. Član sa leve strane je jednak razlici pritisaka na krajevima strujne cevi, prvi član sa desne strane je jednak razlici pritisaka nastaloj usled različitih brzina na krajevima, dok je drugi član razlika pritisaka nastala usled razlika u težini i visini fluida na krajevima cevi. Ako se pritisci za jedan kraj cevi prebace na istu stranu dobija se:

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2,$$

uobičajeni oblik Bernulijeve jednačine.

Pošto su preseki na strujnoj cevi, kao i sama strujna cev, proizvoljno izabrani, na osnovu Bernulijeve jednačine može se zaključiti:

$$p + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.}$$

Viskoznost

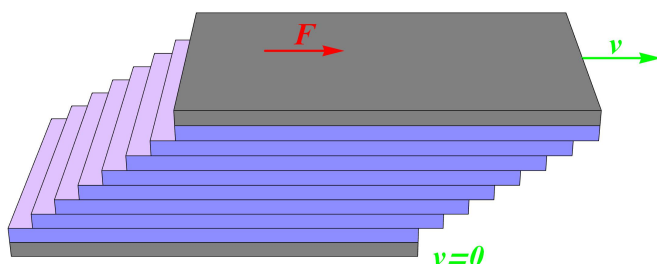
Viskoznost je pojava unutrašnjeg trenja u fluidima. Sile viskoznog trenja se suprotstavljaju kretanju nekog dela fluida u odnosu na susedne delove. U prethodnom odeljku pojednostavili smo model fluida tako što smo potpuno zanemarili sile viskoznog trenja. Međutim viskoznost je u mnogim pojavama u prirodi vrlo važna i ne može se zanemariti.

Na osnovu Bernulijeve jednačine za stacionaran tok idealnog fluida jasno je da će u slučaju kada tečnost teče kroz horizontalnu cev konstantnog poprečnog preseka, pritisak tečnosti biti isti duž cele cevi. Ako fluid nije idealan, ako ima viskoznog trenja, onda će pritisak opadati duž cevi u smeru toka. Rad sile trenja će smanjivati kinetičku energiju fluida, a manja brzina će dovesti do manjeg pritiska. Da bi viskozni fluid mogao stacionarno da teče na krajevima je potrebno održavati konstantnu razliku pritisaka koja bi uravnotežila sile viskoznog trenja. Idealni fluid teče kroz horizontalnu cev i bez razlike pritisaka na krajevima cevi. Zamislite da oborite punu bocu vode koja je otvorena. Vrlo brzo će najveći deo vode isteći van boce. Ali, ako ostavite otvorenu tubu sa pastom za zube ništa neće isteći napolje. Zato i moramo da pritiskamo tubu da bi pasta izlazila.

Drugi primer je tečnost koja se nalazi u otvorenom sudu. Sud počne da rotira, konstantnom ugaonom brzinom. Ako je fluid viskozan, on će postepeno početi da rotira. Prvo se pokreću slojevi koji su uz suda, pa postepeno se rotacija prenosi do slojeva bližih osi rotacije, ali tečnost neće rotirati kao kruto telo. Slojevi neće imati jednake ugaone brzine. Dakle, tokom rotiranja suda prenosi se rotacija sa zidova suda na susedne slojeve fluida, pa zatim sa njih postepeno sve do slojeva bliskih osi rotacije. Ovakav prenos je moguć zato što postoje tangencijalne sile između slojeva tečnosti, sile viskoznog trenja.

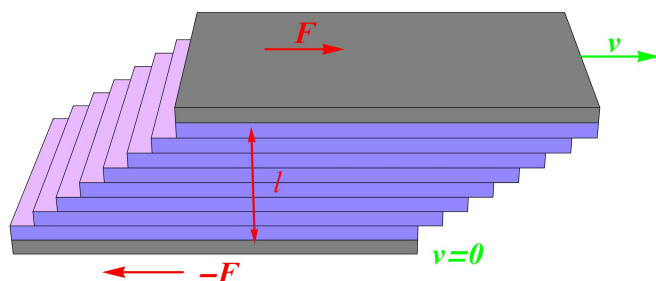
Bernulijeva jednačina je izvedena za idealan fluid, nestišljiv, zanemarljivog viskoznog trenja, koji stacionarno teče. Treba uvek biti svestan ovih aproksimacija kada se ona upotrebljava.

Da bismo prešli čamcem sa jednog na drugi kraj jezera, moramo da veslamo. Nije dovoljno da samo odgurnemo čamac sa obale. Postoji trenje, tako da sile viskoznog trenja deluju na čamac i zaustavljaju ga. Međutim ni veslanjem ne bismo pokrenuli čamac koji miruje na jezeru da nema viskoznog trenja.



Slika 1.25: Laminaran tok viskoznog fluida. Donji zid suda miruje, dok se gornji kreće brzinom v .

Nešto više o prirodi viskoznosti može da se zaključi na osnovu sledećeg oglada. Viskozni fluid se nalazi između dve beskonačne ploče. Donja ploča je nepokretna, a gornja se kreće konstantnom brzinom v . Pošto je fluid viskoznan, da bi se gornja ploča kretala konstantnom brzinom na nju je potrebno delovati silom F (slika 1.25).



Slika 1.26: Laminaran tok viskoznog fluida. Da bi donja ploča mirovala na nju je potrebno delovati silom $-F$.

Da bi donja ploča mirovala na nju treba delovati silom $-F$. Pošto je sila F takva da omogućava kretanje konstantnom brzinom gornje ploče, onda je ona po intenzitetu jednaka sili viskoznog trenja. Još je Njutn eksperimentalno utvrdio da je sila viskoznog trenja proporcionalna brzini v , površini ploče S , a obrnuto proporcionalna rastojanju između ploča, l (slika 1.26).

$$F = \eta S \frac{v}{l},$$

gde je η koeficijent viskoznosti. On ne zavisi od materijala od koga je napravljena ploča, već samo od svojstava tečnosti, kao i od različitih parametara koji određuju stanje tečnosti, pre svega temperature. Sa porastom temperature tečnosti su manje viskozne, dok je sa gasovima situacija obrnuta. U tabeli 1.2 su dati koeficijenti viskoznosti vode na različitim temperaturama.

U mnogim mašinama se koriste različite tečnosti. Na primer, mašinsko ulje se koristi za podmazivanje. Ako uređaj značajno menja temperaturu tokom rada onda je potrebno napraviti mešavinu ulja za podmazivanje takvu da se viskoznost što manje menja tokom rada.

U slučaju u kojem se obe ploče kreću različitim brzinama, sila viskoznog trenja je:

$$F = \eta S \frac{v_2 - v_1}{l},$$

gde je v_2 brzina gornje a v_1 brzina donje ploče.

Vulkanska lava, dok je usijana lako teče niz padine kratera. Ali tokom vremena se hladi i teče sve sporije dok se ne zaustavi, bez obzira na oblik terena. To je zato što hlađenjem lava postaje viskoznija i teže teče. Slično je i sa sosom za testeninu. Dok je vruć mnogo lakše teče nego kada je hladan, zato se i lakše prospe iz kašike za sipanje dok je vruć.

Tabela 1.2: Koeficijent viskoznosti vode na različitim temperaturama.

Temperatura (°C)	Koeficijent viskoznosti (mPa·s)
10	1.3059
20	1.0016
30	0.79722
50	0.54652
70	0.40355
90	0.31417

Da bi se gornja ploča kretala konstantnom brzinom na nju okolni fluid mora da deluje silom $-F$. Po trećem Njutnovom zakonu onda ploča na okolni fluid deluje silom F . Slično, na donju ploču okolni fluid deluje silom F , da bi ona mirovala. Onda ploča na fluid deluje silom $-F$. To znači da se sloj viskoznog fluida prilepi za zidove suda, ili telo oko koga teče, odnosno ne kreće se u odnosu na njih.

Ako u ogledu sa pločama posmatramo bilo koji sloj fluida, a kao pokretne ploče posmatramo susedne slojeve fluida, opet je primenljiva formula za viskoznu silu, i u tom slučaju može da se napiše kao:

$$F = \eta S \frac{dv}{dx},$$

gde je v sada brzina fluida.

Samim tim, uz činjenicu da uvek postoji sloj fluida koji se zalepi za čvrste granice, jasno je zašto koeficijent viskoznosti, η , ne zavisi od bilo kakvih svojstava ploča. Pored toga, zbog viskoznog trenja, pri laminarnom kretanju fluid će se kretati slojevito, kao što je prikazano na slikama 1.25 i 1.26.

Tečnosti koje lako teku (voda na primer) manje su viskozne od tečnosti koje je teško pokrenuti (med ili pekmez). U drugoj tabeli 1.3 su dati koeficijenti viskoznosti za različite tečnosti, na istoj temperaturi. Vidi se da viskoznost ne zavisi mnogo od gustine. Na primer jestivo ulje ima oko 50 puta veći koeficijent viskoznosti od vode, a ređe je od vode.

Profili brzina pri kretanju viskoznog fluida – dodatak

NEKA VISKOZNA NESTIŠLJIVA TEČNOST STACIONARNO teče kroz pravu cilindričnu cev, poluprečnika R . Strujne linije su paralelne osi cevi. Strujne cevi mogu da budu cilindri vrlo tankih zidova. Zbog jednačine kontinuiteta brzina fluida u svakoj ovakvoj strujnoj cevi se ne menja duž cevi. Ali brzina fluida nije ista u različitim strujnim cevima, zavisi od rastojanja od ose cevi, kao što je prikazano na slici 1.27.

Uočimo unutar cevi kratak i tanak cilindrični delić fluida, dužine dx i poluprečnika r . Neka je x -osa usmerena duž toka fluida.

Na osnovu jednačine za silu viskoznosti na svaki omotač cilindra deluje sila:

$$dF = 2\pi r \eta \frac{dv}{dr} dx.$$

Sa druge strane, na osnovice cilindra sa obe strane deluju sile pritiska okolnog fluida:

$$dF_p = \pi r^2 (p(x) - p(x + dx)) = -\pi r^2 \frac{dp}{dx} dx.$$

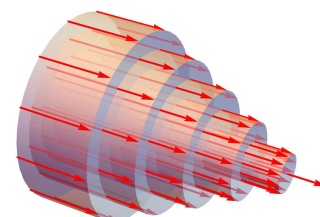
U slučaju stacionarnog toka ove dve sile moraju da se saberu u nulu, odnosno:

$$2\eta \frac{dv}{dr} = r \frac{dp}{dx}.$$

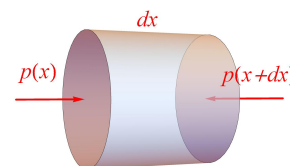
Tanak sloj fluida se uvek zalepi za zidove suda sa kojima je u kontaktu, ili na površ tela zaronjenog u fluid. Zbog toga se prljavština lepi i za vrlo brzo rotirajuća krilca ventilatora. Zato je praktično nemoguće oprati tanjir posle obroka samo pod mlazom vode, ma koliko da je mlaz jak, mora da se upotrebi sušer za pranje.

Tabela 1.3: Koeficijent viskoznosti različitih supstanci na temperaturi od 20 °C.

Supstanca	Koeficijent viskoznosti (mPa·s)
Voda	1.0016
Benzen	0.064
Živa	1.526
Mleko	2.12
Gazirani napitak	2.53
tamne boje	
Maslinovo ulje	56.2
Med	2000-10000
Kečap	5000-20000
Gusti pekmez	10^4 - 10^6
Smola	2.3×10^{11}



Slika 1.27: Profil brzina pri laminarnom kretanju viskoznog fluida kroz cilindričnu cev.



Slika 1.28: Kratak delić strujne cevi.

Strujne cevi su tako izabrane da $v(r)$ ne zavisi od x . Može se pretpostaviti da je promena pritiska duž cevi konstantna, odnosno da je ista duž cele cevi

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_2 - p_1}{l},$$

gde su p_2 i p_1 pritisci na izlazu i ulazu u cev, respektivno, a l je dužina cevi. Tada je

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r.$$

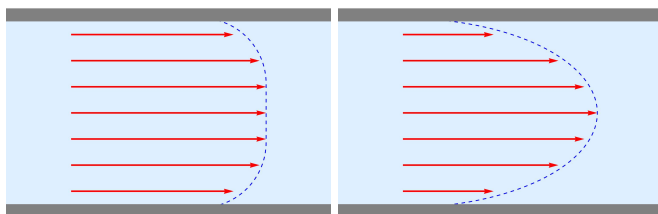
Integraljenjem se dobija zavisnost brzine fluida od rastojanja delića od ose cevi:

$$v(r) = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C.$$

Konstanta integracije se određuje iz uslova da brzina fluida uz zidove cevi ($r = R$) treba da bude jednaka nuli. Onda je:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

Iz rezultata se vidi da je brzina fluida najveća na osi cevi, $v(0) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2$, kao i da je profil brzina fluida koji protiče kroz cev paraboloidan, kao što se vidi na slikama 1.29.



Slika 1.29: Profil brzina pri laminarnom kretanju viskoznog fluida kroz cev. Levo je manje viskozan fluid nego desno.

Prikazani profili nude i jednostavno objašnjenje zašto reka teče najbrže u blizini sredine toka, dok je blizu obala brzina mnogo manja. U cevi cilindričnog oblika profil brzina je paraboloid, što se može naslutiti sa slike 1.27.

PROTOK VISKOZNE TEČNOSTI koja stacionarno teče kroz cev se može izračunati kada se zna profil brzine. Masa fluida koji protekne u jedinici vremena kroz prsten unutrašnjeg poluprečnika r i spoljašnjeg $r + dr$ je jednaka $dQ = \rho v 2r \pi dr$ (maseni protok). Zamenom izraza za brzinu, dobija se:

$$dQ = \pi \rho \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} (R^2 - r^2) r dr,$$

odnosno

$$Q = \pi \rho \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \pi \rho \frac{p_1 - p_2}{8\eta l} R^4.$$

Protok viskozne tečnosti je proporcionalan razlici pritisa na krajevima cevi, četvrtom stepenu poluprečnika cevi, a obrnuto proporcionalan je dužini cevi i koeficijentu viskoznosti tečnosti. Ovo je poznata Poazejeva formula.

Jednačina 1.19 slobodno može da se nazove jednačinom zdravlja. Neka je viskozni fluid krv u našem telu. Srce treba da ostvari potrebnu razliku pritisa da bi krv stigla do svakog delića tela. što je veća ukupna dužina krvnih sudova to je potrebna veća razlika pritisa. Sa druge strane profil sudova mnogo više utiče na pritisak. Dužina krvnih sudova zavisi od telesne mase. Efektivni presek krvnih sudova zavisi od debljina naslaga u njima. Dakle ovaj prost model pokazuje da je mnogo važnije za zdravlje šta jedemo, nego da li imamo neki kilogram viška. Jer ako srce treba da postigne veći pritisak nego što je optimalan, onda radi više i samim tim kraće traje.

Ako Poazejevu formulu napošemo na malo drugačiji način, dobijamo:

$$\Delta p = \frac{8\eta l Q}{\pi \rho R^4} \quad (1.19)$$

Ako poredimo proticanje viskoznog fluida kroz istu cev, da bi se ostvario isti protok potrebna je veća razlika pritiska za tečnost sa većim koeficijentom viskoznosti. Ako variramo parametre cevi, onda se vidi da je potrebna veća razlika pritiska da bi tečnost prošla kroz dužu cev, kao i kroz užu cev.

Primer 1.8

Kinetička energija fluida i rad sile viskoznog trenja

Kinetička energija fluida koji protekne kroz prstenasti poprečni presek u jedinici vremena je

$$E_k = \int_0^R \frac{1}{2} \rho v^2 2\pi r v dr.$$

Posle zamenjivanja izraza za brzinu, dobija se

$$E_k = \rho \pi \left(\frac{\Delta p}{4\eta l} \right)^3 \int_0^R (R^2 - r^2)^3 r dr.$$

$$E_k = \frac{1}{8} \rho \pi \left(\frac{\Delta p}{4\eta l} \right)^3 R^8.$$

Rezultat može da se prikaže kao:

$$E_k = \frac{1}{4} \left(\rho \pi \frac{\Delta p}{4\eta l} R^4 \right) \left(\frac{\Delta p}{4\eta l} R^2 \right)^2 = \frac{1}{4} Q v_0^2,$$

gde je v_0 maksimalna brzina fluida (duž ose cevi). Rad u jedinici vremena (snaga) sila pritiska na krajevima cevi je:

$$A = \int_0^R v(\Delta p) (2\pi r dr).$$

Posle zamene izraza za brzinu, i integracije, rad je:

$$A = \frac{1}{\rho} \Delta p Q.$$

Ovaj rad je jednak, po apsolutnoj vrednosti, radu sila viskoznog trenja u slučaju kada je kinetička energija konstantna (u toj situaciji sila pritiska je tačno toliko da neutrališe sile viskoznog trenja), $A = -A_{vtr}$. Ako se razlika pritiska izrazi preko maksimalne brzine fluida u cevi dobija se da je rad sila viskoznog trenja:

$$A_{vtr} = -\frac{4\eta v_0 l}{\rho R^2} Q.$$

Važno je uočiti da je odnos rada sila viskoznog trenja i kinetičke energije fluida dobar kriterijum za primenljivost Bernulijeve jednačine. Ako je $|A_{vtr}| \ll E_k$ onda može da se primeni Bernulijeva jednačina. Ako se u uslov uvrste izrazi za rad i kinetičku energiju, dobija se:

$$\frac{\rho v_0 R^2}{16\eta l} \gg 1.$$

Poazejeva formula je primenljiva samo za laminaran tok tečnosti. Pri velikim brzinama tečnosti laminaran tok može da postane nestabilan, i prelazi u turbulentan tok. Tada Poazejeva formula više ne važi.

Opticanje tela i turbulencija

Neka viskozni fluid stacionarno i laminarno teče kroz cev pravilnog oblika, pri relativno malim brzinama. Ako se spoljašnji uslovi ne menjaju mnogo, tok će ostati stacionaran i laminaran. Međutim, ako fluid naiđe na prepreku situacija može da se promeni. U nekim slučajevima fluid prilikom opticanja oko prepreke može da prestane da se kreće laminarno i da počne turbulentno kretanje.

Problem kretanja fluida, pa samim tim i opticanja fluida oko nekog tela, može da bude veoma složen. Mnogo toga zavisi od brzine fluida, ali i od koeficijenta viskoznosti. Zbog toga će biti analizirani samo najosnovniji pojmovi i slučajevi.

Dobar kriterijum za ocenu kako fluid može da se kreće daje jedna bezdimenziona veličina koja se zove Reynoldsov broj:

$$Re = \frac{\rho l v}{\eta}, \quad (1.20)$$

gde je ρ gustina fluida, v brzina tela u odnosu na fluid (ili brzina fluida u cevi), l neka karakteristična dužina tela od značaja za konkretno kretanje i η je koeficijent viskoznosti fluida. Parametar l nije samo karakteristika tela koje se kreće, već zavisi od toga u koju stranu tela tokom kretanja udara fluid. Zamislite telo jajolikog oblika. Parametar će zavistiti od toga da li se telo kreće vrhom napred ili se kreće bočno, u odnosu na fluid. Reynoldsov broj prilično podseća na odnos kinetičke energije fluida i rada sila viskoznog trenja, i ta sličnost može da bude korisna za pojašnjenje. Za velike vrednosti Reynoldsovog broja viskoznost fluida ima vrlo malo uticaja na kretanje, dok za male vrednosti viskoznost ima dominantan uticaj.

Reynoldsov broj zavisi i od brzine fluida u nekoj cevi. Lako može da se desi da fluid dok se kreće relativno malim brzinama teče laminarno, a kako mu se brzina povećava tako počinju da se javljaju turbulencije, da bi konačno pri velikim brzinama kretanje bilo potpuno turbulentno. Pri turbulentnom, neregularnom, kretanju delići fluida mogu da napuste strujnu cev u kojoj su bili pre pojave turbulencija. Mnoge fizičke veličine pri turbulentnom kretanju se vrlo mnogo menjaju (fluktuiraju), temperatura, gustina, brzina i pritisak na primer.

U tabeli 1.4 su dati redovi veličina Reynoldsovog broja koji predstavljaju granice za određenu vrstu kretanja fluida. Iz definicije Reynoldsovog broja 1.20 se vidi da je značajan faktor odnos koeficijenta viskoznosti, η i gustine fluida ρ , što predstavlja kinematički koeficijent viskoznosti, $\nu = \eta/\rho$. Što je fluid viskozniji to je veći opseg brzina za koje će se fluid kretati laminarno. U tabeli 1.5 je data recipročna vrednost kinematičkog koeficijenta viskoznosti za nekoliko fluida.

Tabela 1.4: Standardni redovi veličina Reynoldsovog broja kao kriterijumi za vrstu kretanja i oblik zavisnosti sile otpora sredine od brzine.

Vrednost Re	Kretanje	Zavisnost
$Re < 1$	Laminarno	Linearna
$1 < Re < 10$	Prelazno	
$10 < Re < 10^6$	Mešovito	Kvadratna
$Re > 10^6$	Turbulentno	

Tabela 1.5: Količnik gustine i koeficijenta viskoznosti (recipročna vrednost kinematičkog koeficijenta viskoznosti).

Supstanca	ρ/η (s/m ²)
Voda	10^6
Vazduh	6×10^5
Glicerin	0.84

Pored kriterijuma za vrstu kretanja fluida, Reynoldsov broj može da posluži i za procenu zavisnosti sile otpora sredine od brzine tela. U tabeli 1.4 je data vrsta zavisnosti sile otpora sredine od brzine tela, u zavisnosti od Reynoldsovog broja.

Na osnovu datih rezultata vidi se da sila otpora sredine koja deluje na telo koje se kreće kroz fluid može da se menja po obliku u zavisnosti od brzine tela. Pri malim brzinama sila otpora sredine linearno zavisi od brzine tela. Za sferno simetrično telo može da se pokaže da je sila $F = 6\pi\eta rv$ (Stoksova sila), gde je η koeficijent viskoznosti a r poluprečnik tela. Međutim, kako brzina tela raste, Stoksova sila više ne opisuje dobro silu otpora. Sila otpora postaje značajno veća od vrednosti koju daje Stoksov izraz, i zavisnost od brzine postaje kvadratna:

$$F_{ot} = \frac{1}{2}\rho_f C S v^2,$$

gde je ρ_f gustina fluida, S je površina poprečnog preseka tela u pravcu kretanja (krug za sferno telo), dok je C faktor koji zavisi od geometrije tela i vrlo malo od koeficijenta viskoznosti. Izrazi za sile otpora sredine su u saglasju sa već pomenutom činjenicom da su pri malim brzinama viskozni efekti dominantni, dok pri većim brzinama viskoznost gubi na značaju.

Primer 1.9

Brzina kišne kapi

Ispitajmo zašto kiša nije opasna po život. Kada ne bi bilo sila viskoznog trenja, kap kiše koja bi krenula iz oblaka na visini od 2 km, udarila bi u zemlju brzinom od 200 $\frac{m}{s}$! Ova brzina bi bila fatalna za većinu živih bića na Zemlji. Ipak, spašava nas viskoznost vazduha. U tabeli 1.5 je dato da je recipročna vrednost kinematičkog koeficijenta viskoznosti za vazduh reda veličine 10^5 s/m². To znači da je za kuglicu od nekoliko milimetara u prečniku i vrlo mala brzina dovoljna da Reynoldsov broj bude veći od 10. Na osnovu podataka iz tabele 1.4 vidi se da je potrebno uzeti kvadratnu zavisnost sile viskoznog trenja od brzine tela. Za kuglicu vode je konstanta $C = 0.47$. Sa druge strane $\frac{1}{2}C\pi \approx \frac{3}{4}$, pa je onda sila otpora sredine približno:

$$F_{ot} = \frac{3}{4}\rho_f r^2 v^2.$$

Na kišnu kap deluje gravitaciona sila, sila potiska u vazduhu, kada se pokrene i sila otpora vazduha:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \rho_f V g - F_{ot}.$$

Masu kapi je $m = \rho_v V$, odnosno $m = \rho_v \frac{4}{3}\pi r^3$. Onda je:

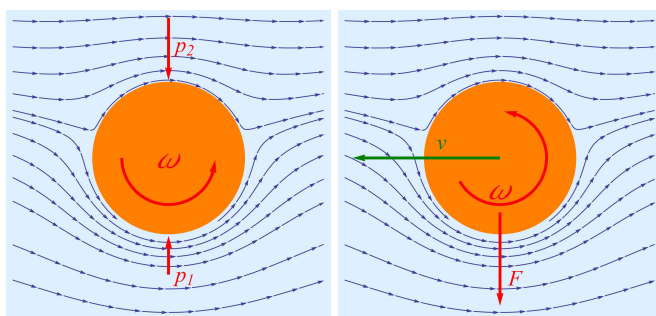
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{9}{16\pi} \frac{\rho_f}{\rho_v} \frac{v^2}{r} + g \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_v}\right).$$

Gravitaciona i sila potiska su konstantne, sila otpora raste sa brzinom kapi. Brzina će se povećavati sve dok se sila otpora ne izjednači sa razlikom intenziteta gravitacione sile i sile potiska. Tada će nastaviti da se kreće konstantnom brzinom. Da bi se dobila brzina kapi u trenutku u kojem se sile izjednače, može da se reši diferencijalna jednačina za brzinu, i nađe granična vrednost brzine u beskonačnosti. Međutim može i mnogo jednostavnije. Ako se u jednačini kretanja stavi da je ubrzanje jednako nuli, dobija se konačna brzina kapi:

$$v^2 = \frac{16\pi g \rho_v r}{9\rho_f} \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_v}\right).$$

Za kap poluprečnika 5 mm dobija se da je brzina oko 10 m/s. Rezultat se neće mnogo promeniti i ako se zanemari sila potiska vazduha.

MAGNUSOV EFEKAT je pojavljivanje bočne sile koja deluje na telo koje rotira u fluidu koji se kreće, ili rotira i kreće se kroz fluid. Na slici 1.30 je prikazano telo koje rotira u fluidu. Prikazane su i strujne linije fluida. U slučaju viskoznog fluida tanak sloj fluida je zalepljen za telo. Zbog rotacije tela i prilepljenog sloja fluida sa jedne strane fluida telo zbog sile trenja dodatno ubrzava okolni fluid (fluid ispod tela na slici), dok se sa druge strane opire kretanju okolnog fluida, odnosno usporava ga (gornji kraj tela na slici). Zbog toga je brzina fluida sa jedne strane tela veća od brzine fluida sa druge strane. Po Bernulijevoj jednačini sledi da su statički pritisci različiti, i da se javlja sila usled razlike u pritiscima (slika 1.30 desno). Telo koje rotira i kreće se u fluidu zbog ove sile skreće.

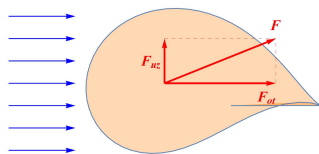


Slika 1.30: Razlika pritiska sa bočnih strana tela koje rotira u fluidu koji se kreće (levo). Sila koja deluje na telo zbog razlike pritiska (desno).

Magnusov efekat se lako vidi u sportovima sa loptom, u kojima lopta može da se kreće velikim brzinama. Na primer „felš“ udarac u fudbalu ili udarci sa velikom rotacijom u tenisu. Posebno su zanimljive putanje loptica u stonom tenisu. One vrlo brzo rotiraju, i zbog toga su im putanje vrlo zakrivljene.

Sila uzgona – dodatak

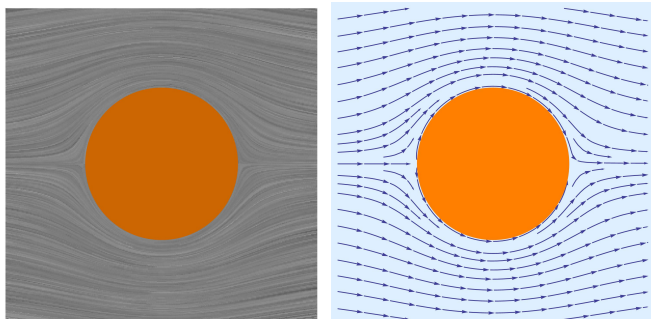
Neka se telo proizvoljnog oblika kreće kroz fluid. Na telo fluid deluje silom koja može da se razloži na dve komponente. Jedna komponenta neka bude paralelna pravcu kretanja tela (ili fluida, ako telo miruje), F_{ot} , a druga neka bude ortogonalna na taj pravac, F_{uz} . Sila koja se paralelna pravcu kretanja naziva se *sila čeonog otpora*, a njoj ortogonalna, *sila uzgona*, (slika 1.31).



Slika 1.31: Sile koje deluju na telo koje se kreće kroz fluid.

Sila uzgona može da bude usmerena naviše ili naniže u zavisnosti od oblika tela. Sila čeonog otpora je zbir dve sile. Sile koja potiče

od razlike pritisaka sa prednje i zadnje strane tela, kao i od sile viskoznoeg trenja. Pri velikim brzinama, odnosno za velike vrednosti Reynoldsovog broja, sila pritiska je dominantna u sili čeonog otpora. Pri malim brzinama dominantna je sila trenja.

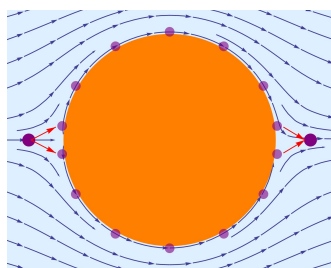


Slika 1.32: Profil brzina pri laminarnom kretanju viskoznog fluida oko simetričnog tela. Desno je prikazano polje brzina.

Neka se simetrično telo kreće kroz idealan fluid i neka je kretanje stacionarno i ravnomerno. Može se pokazati na osnovu simetrija linija toka fluida oko tela da je sila čeonog otpora u tom slučaju jednaka nuli (D'alambertov paradoks). To znači da u slučaju ravnomernog kretanja tela kroz fluid, ako nas zanima sila čeonog otpora, ne može se uzeti da je fluid idealan. Može se pokazati da je i u slučaju kada telo nije simetrično (u odnosu na linije toka) sila čeonog otpora jednaka nuli. Ako se telo kreće ubrzano, onda sila čeonog otpora nije jednaka nuli u modelu idealnog fluida.

Ako je telo simetrično onda je i sila uzgona jednaka nuli, u već definisanim uslovima.

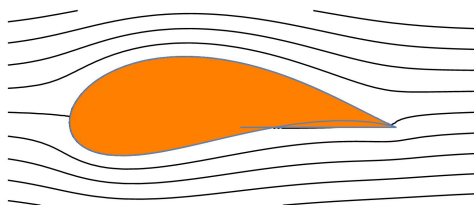
Analiza kretanja tela kroz idealan fluid nam daje za pravo da napravimo još jednu korisnu aproksimaciju. U modelu idealnog fluida kretanje fluida je neprekidno. To konkretno znači da dva delića koja se rastanu pri udaru u prepreku, posle obilaska oko tela ponovo se sastanu.



Slika 1.33: Model neprekidnog toka.

U slučaju u kome se viskoznost fluida ne može zanemariti, onda se može desiti da se javi oblast iza tela u kojoj nema mnogo molekula fluida. Odnosno kao da se delići fluida posle opticanja sastaju malo iza tela. Drugim rečima sa zadnje strane tela postoji oblast odvajanja u kojoj nema molekula fluida koji se kreću duž strujnih linija. Zbog toga se javlja razlika pritisaka na prednjoj i zadnjoj strani tela, i sila čeonog otpora je onda zbir sile pritiska i sile viskoznog trenja. Pored toga, pri većim brzinama slojevi fluida koji se odvajaju od tela mogu da počnu da se kreću turbulentno iza tela (turbulentni trag) što

doprinosi povećanju sile čeonog otpora (odnosno dodatno smanjuje pritisak fluida iza tela koje se kreće). Zbog navedenih efekata iza tela potrebno je posebnu pažnju posvetiti dizajniranju oblika tela koja treba da se kreću velikim brzinama kroz realan fluid. Oblik treba da bude takav da smanji turbulencije i oblast odvajanja na najmanju moguću meru.



Slika 1.34: Opticanje vazduha oko avionskog krila.

Posebno zanimljiv primer je telo oblika kao krilo aviona koje se kreće kroz vazduh. U najjednostavnijem slučaju takvo kretanje je prikazano na slici 1.34. Ako pretpostavimo da možemo da iskoristimo neprekidnost kretanja fluida, onda, grubo, možemo da primenimo i Bernulijevu jednačinu. Zbog zakrivljenosti krila fluid koji obilazi krilo sa gornje strane se kreće većom brzinom od dela fluida koji prolazi ispod krila. Po Bernulijevoj jednačini onda je statički pritisak okolnog fluida veći tamo gde je brzina fluida manja. Pojavljuje se sila usled razlike statičkih pritisaka, koja ima komponentu vertikalno naviše. Ovo je upravo sila uzgona koja omogućava avionu da leti.

Pored toga sa slike se da naslutiti po obliku strujnih linija da oblik krila otežava odvajanje vazduha od krila pre nego što ga vazduh potpuno obiđe. Time se spečava povećanje sile čeonog otpora.

U realnom slučaju Bernulijeva jednačina nije upotrebljiva jer vazduh nije idealan fluid. Ali može da se objasni pojava sile uzgona.

Zadaci

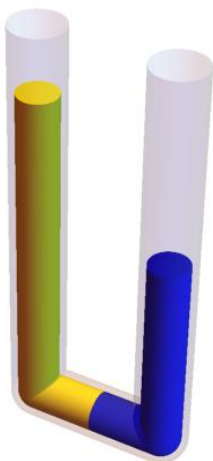
Gustina fluida

- 1.1 Kolika je masa vazduha u učionici?
- 1.2 Sortirajte sledeća tela po gustinama, od najmanje do najveće: (i) $m = 4.00 \text{ kg}$, $V = 1.60 \times 10^{-3} \text{ m}^3$; (ii) $m = 8.00 \text{ kg}$, $V = 1.60 \times 10^{-3} \text{ m}^3$; (iii) $m = 8.00 \text{ kg}$, $V = 3.20 \times 10^{-3} \text{ m}^3$; (iv) $m = 2560 \text{ kg}$, $V = 0.640 \text{ m}^3$; (v) $m = 2560 \text{ kg}$, $V = 1.28 \text{ m}^3$.
- 1.3 Izračunajte gustinu neutrona i gustinu nekog atomskog jezgra (potrebne podatke pronađite na internetu). Uporedite dobijene rezultate sa gustinom neutronske zvezde (date u tabeli 1.1).

Pritisak

- 1.4 Kolika je sila kojom vazduh pritiska pod učionice? Uporediti dobijeni rezultat sa težinom vazduha u učionici. Da li ima razlike? Objasnite.

- 1.5 Merite masu boce pune vode. Zašto vaga ne pokazuje i uticaj sile pritiska vode i atmosferskog pritiska koji deluje na vagu? Objasnite.
- 1.6 Kako izgledaju automobilske gume ako je u njima pritisak gasa 1 atmosfera?
- 1.7 Izrazite normalni krvni pritisak u jedinicama SI. Kako je moguće da normalan krvni pritisak bude manji od atmosferskog?
- 1.8 Da li je moguće da živin manometar pokaže istu visinu u dobro zaptivenom frižideru, i napolju, vrelog letnjeg dana? Ako može da li manometar pokazuje iste pritiske?
- 1.9 U sud sa slike su pažljivo sipani ulje i voda.

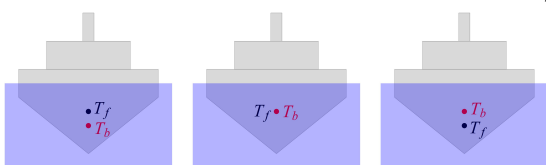


Koliki je odnos visina stubova vode i ulja u ovom sudu?

- 1.10 Kupujete jabuke na pijaci, posle časa iz termodinamike. Tražite kilogram jabuka. Dok čika meri jabuke vama pada na pamet da vazduh iznad tase pritiska tas, odnosno vaga bi trebalo da pokaže masu vazdušnog stuba od tase do vrha atmosfere. Izračunajte težinu ovakvog vazdušnog stuba. Da li je ova sila uključena u težinu jabuka?

Potisak

- 1.11 Čelični zupčanik mase 20 kg, okačen je o jaku nit. Izračunati silu zatezanja niti ako zupčanik visi u vazduhu, i ako je potopljen u vodu (ali ne dodiruje dno suda).
- 1.12 Koji od nacrtanih brodova je sigurno stabilan na površini vode? Težište broda je označeno sa T_b a težište istisnutog fluida sa T_f .



- 1.13 U čamcu, na jezeru, se nalaze čovek i poveliki sanduk. U jednom trenutku čovek ispusti sanduk u vodu, i on potone. Šta će se desiti sa nivoom vode u jezeru? Objasniti.
- 1.14 Dete sedi u automobilu i drži balon napunjen helijumom. Automobil skreće na levo. Na koju stranu, u odnosu na vertikalnu će skrenuti balon?
- 1.15 Zlatni prsten je okačen o konac. Naći silu zatezanja konca u vazduhu, i u slučaju kada je prsten zaronjen u vodu, a konac i dalje zategnut.
- 1.16 Na vagi se nalazi sud napunjen vodom. Da li će vaga pokazati drugu masu ako se u sud uroni

telo okačeno o konac, ali ne dodiruje dno suda? Objasnite.

- 1.17 Buckminster Fuller „Bucky” (1895-1983) poznati arhitekta smislio je, pored mnoštva drugih stvari i leteće gradove. Neka je jedan grad u obliku kocke stranice 10 kilometara. Kolika je sila potiska koja deluje na ovu kocku?

Površinski napon, kvašenje i kapilarne pojave

- 1.18 Površina kalote na sferi poluprečnika R je $2R\pi h$, gde je h visina kalote. Pokažite da je za male uglove θ (slika 1.15) ona približno jednaka $r^2\pi$.
- 1.19 Ugao kvašenja vode u staklenom sudu je $\theta = 20^\circ$. Koliki treba da bude prečnik kapilare da bi visina vodenog stuba u kapilari bio 1 m, u odnosu na nivo tečnosti van kapilare (u dovoljno širokom sudu).

Kretanje fluida, jednačina kontinuiteta i Bernulijeva jednačina

- 1.20 Na osnovu jednačine kontinuiteta objasnite narodnu poslovicu „Tiha voda breg roni!”.
- 1.21 Zašto u planinskim klancima vetar najjače duva?
- 1.22 U sistemu za podmazivanje teških mašina koristi se ulje, $\rho = 850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, koje se pušta kroz cilindrične cevi prečnika 8 cm, brzinom $9.5 \frac{1}{\text{s}}$. Kolika je brzina ulja? Koliki je maseni protok? Ako ulje pređe u dvostruko užu cev, kolika će biti brzina, protok, maseni protok?
- 1.23 Tokom radova na održavanju autoputa radnici su zatvorili dve od tri trake, u jednom smeru, i tako izazvali zagušenje. Da li se automobili tokom kretanja na ovoj deonici autoputa ponašaju kao stišljiv ili nestišljiv fluid? Objasnite.

- 1.24 Vodovodna cev na ulazu u kuću ima prečnik 2 cm. Pritisak vode u cevi je 4 atmosfere. Cev prečnika 1 cm vodi vodu do kupatila na spratu, na visini 5 m. Brzina vode na ulazu u zgradu je 1.5 m/s. Naći brzinu vode, pritisak i protok vode na izlazu iz slavine u kupatilu. Da li će se pritisak u cevima promeniti kada se zatvori slavina? Objasniti.

Viskoznost

- 1.25 Koliko puta jače medicinska sestra treba da pritisne špric pri davanju injekcije pacijentu, ako umesto igle prečnika 0.55 mm uzme iglu prečnika 0.4 mm? Igle su iste dužine, i bilo bi idealno da protok tečnosti u oba slučaja bude isti.

- 1.26 Nađite brzinu i pređeni put kišne kapi u funkciji vremena u primeru 1.9.
- 1.27 Na osnovu primera 1.9 izračunati konačne brzine kuglica poluprečnika 5 mm za (a) staklenu kuglicu u vodi; (b) staklenu kuglicu u vazduhu; (c) gvozdenu kuglicu u vodi; (d) gvozdenu kuglicu u vazduhu.
- 1.28 Kuglica prečnika 1 cm se nalazi iznad visokog suda koji je potpuno ispunjen vodom. Kuglica se pusti da pada kroz vodu. Procenite koliki put treba da pređe kuglica do trenutka kada će joj brzina biti konstantna. Pretpostaviti da je gustina vode konstantna u celom sudu, i da je početna brzina kuglice na površini vode jednaka nuli.
- 1.29 Kada bi Stoksova sila bila dobra aproksimacija za silu otpora vazduha, kolika bi bila konačna brzina kišne kapi u tom slučaju?

2

Temperatura i toplota

Temperatura i toplotna ravnoteža

Pre svega treba uočiti, ma koliko trivijalno bilo, da toplota nije isto što i temperatura. Precizna definicija temperature je složena, i biće data kasnije, i biće dopunjavana tokom kursa. Za sada je dovoljna intuitivna slika koju imamo o temperaturi.

Intuitivno je jasno da je temperatura povezana sa stepenom zagrejanosti nekog tela, pa ćemo za telo na višoj temperaturi reći da je toplije, a za ono na nižoj da je hladnije. Ali osećaj toplog ili hladnog je krajnje subjektivan. Potreban je objektivan način za merenje temperature.

KAKO IZMERITI TEMPERATURU? Potrebno nam je telo, odnosno fizički sistem, koje ima neku fizičku osobinu koja se menja sa temperaturom. Takav sistem nazivamo *termometrom*. Sistem koji se koristi kao termometar može da bude na primer:

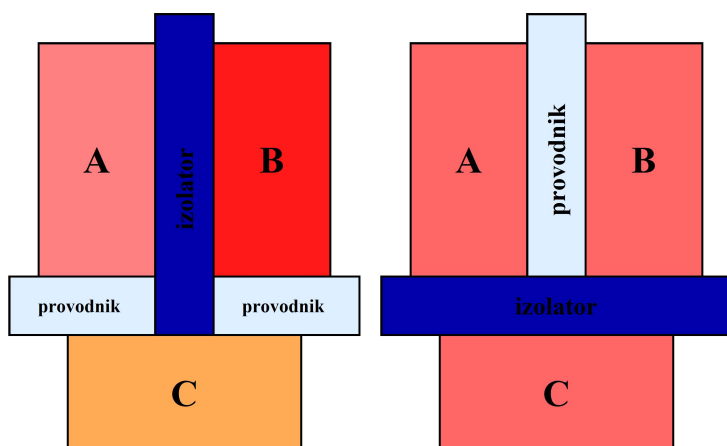
- tečnost u kapilari (alkohol ili živa menjaju zapreminu, a u kapilari se to svodi na visinu stuba tečnosti, u zavisnosti od temperature);
- gas u sudu fiksirane zapremine (pritisak zavisi od temperature);
- provodnik (otpornost provodnika zavisi od temperature), ...

Proces merenja je u svim ovim primerima podrazumevao dovodeње u kontakt termometra sa sistemom čiju temperaturu želimo da izmerimo. Posle nekog vremena potrebnog za uspostavljanje toplotne ravnoteže, kada termometar više ne pokazuje promenu temperature, on pokazuje temperaturu tela.

Toplotna ravnoteža je vrlo važan pojam u fizici i posvetićemo mu posebnu pažnju. Zamislite sledeći ogled: Imamo tri sistema (tela) A, B i C. Sistemi nisu u konatktu, između njih ima prostora da se ubaci novi sistem, koji bi bilo u dobrom kontaktu sa susednim sistemima (videti sliku 2.1). Sistemi koji mogu da se ubace u prostor između sistema A, B ili C su toplotni provodnik ili toplotni izolator. Kao što im imena kažu prvi dobro provodi toplotu (metal...), dok je drugi ne provodi (na primer drvo, stiropor...). Sistemi A, B, C, izolator i provodnik su u izolovanoj prostoriji (kutiji). U prvoj postavci izolator se nalazi između sistema A i B, a provodnik između A i C i B i C,

Ako imate kuhinjski termometar možete da ga stavite u vrelo čaj, i da pratite pokazivanje termometra. Temperatura koju pokazuje termometar će u početku vrtoglavo da raste, pa zatim sve sporije, da bi posle nekog vremena praktično prestala da se menja. Tada je uspostavljena toplotna ravnoteža između termometra i čaja.

kao na slici. To znači da su A i C, kao i B i C u kontaktu, dok A i B nisu u kontaktu. Posle nekog vremena sistemi A i C (kao i B i C) dolaze u toplotnu ravnotežu.



Slika 2.1: Uspostavljanje toplotne ravnoteže tri sistema. Nulti zakon termodinamike.

Ako posle uspostavljanja toplotne ravnoteže toplotni izolator i provodnik zamene mesta, eksperiment pokazuje da se ništa ne dešava, odnosno da su sistemi A i B već u toplotnoj ravnoteži.

Neka je sistem C termometar. Gornji ogled pokazuje da ako je termometar u kontaktu sa sistemima A i B, koji nisu u međusobnom kontaktu, i pokazuje istu temperaturu, to onda znači da su i sistemi A i B u toplotnoj ravnoteži, i ako nisu u direktnom kontaktu.

Zaključujemo da su dva sistema u toplotnoj ravnoteži ako im je temperatura jednaka, i obrnuto, ako dva sistema imaju istu temperaturu onda su u toplotnoj ravnoteži. Dakle, *temperatura je mera toplotne ravnoteže*. Ovaj iskaz predstavlja definiciju temperature, odnosno nulti zakon termodinamike.

Temperaturska skala

Da bi se merila temperatura potrebna je skala za merenje. Najjednostavnije je uzeti neke dve dobro poznate pojave koje se dešavaju na određenoj temperaturi.

- Prva temperatura može da bude temperatura na kojoj se voda mrzne.
- Druga temperatura može da bude temperatura na kojoj voda ključa.
- Neka prva temperatura bude 0, druga 100, samim tim interval je podeljen na 100 delova.

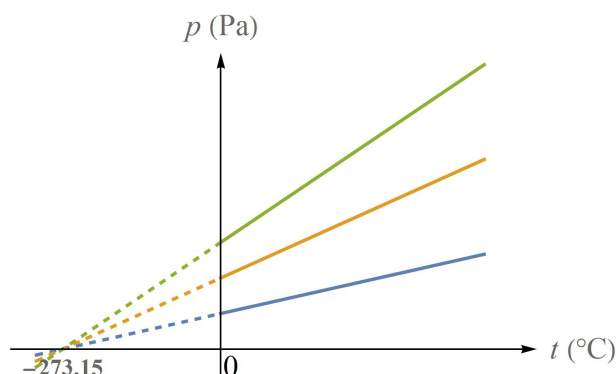
Ovo je upravo definicija Celzijusove skale. Jedinica za temperaturu je stepen celzijusa $^{\circ}\text{C}$.

Problem sa Celzijusovom skalom je u tome, kako ćemo videti kasnije, temperature mržnjenja i ključanja vode zavise i od pritiska vazduha u atmosferi, što treba imati u vidu prilikom kalibracije termometra.

Gasni termometar

Pouzdanost merenja temperature zavisi od karakteristika termometra. Visina tečnosti u kapilari se linearno menja sa temperaturom samo u određenom intervalu temperatura, na primer. Trebalo bi napraviti skalu koja ne zavisi od osobina termometra.

Gas u zatvorenom sudu ima vrlo dobro definisanu zapreminu. Pritisak gasa može precizno da se meri, i pritisak zavisi od temperature. Ako je gas razređen onda je u vrlo širokom opsegu temperatura pritisak gasa linearna funkcija temperature.



Slika 2.2: Zavisnost pritiska gasa od temperature u zatvorenom sudu konstantne zapremine.

Eksperiment pokazuje da se za različite gasove i različite količine gasa dobijaju linearne zavisnosti. Pored toga, vidi se još jedna vrlo važna činjenica, sve prave se seku u istoj tački! Ako se pogledaju koordinate tačke preseka, vidi se da je u toj tački pritisak jednak nuli, a temperatura približno -273.15°C . Ako pretpostavimo da pritisak ne može da bude negativan, u toplotnoj ravnoteži, onda se ova temperatura može uzeti kao najmanja moguća, odnosno kao nula temperaturske skale. Ona ne zavisi od sistema i vrste termometra. Temperatura od -273.15°C , se naziva *apsolutnom nulom*.

Potrebno je uzeti još jednu pouzdanu temperaturu da bi se definisala skala. Temperatura trojne tačke vode je vrlo precizno definisana, na tačno određenom pritisku, pa je ona odličan izbor za drugu pouzdanu temperaturu (0.01°C i 610 Pa).

Ovako su dobijene dve pouzdane tačke za temperatursku skalu, a osnovni interval, stepen, je uzet kao na Celzijusovoj skali. Za nulu skale je uzeta apsolutna nula i tako je definisana Kelvinova (apsolutna) skala.

I pored navedenih prednosti, gasni termometri su nepraktični za upotrebu i uglavnom se koriste za kalibraciju drugih termometara.

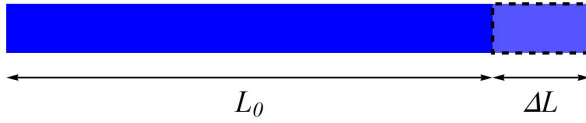
Trojna tačka odgovara stanju supstance u kome je supstanca u sva tri agregatna stanja.

Najviša izmerena temperatura u našoj bliskoj okolini je temperatura Sunčeve korone $3 \times 10^7\text{ K}$.

Termalno širenje

Supstance se uglavnom šire pri zagrevanju. Ako je promena jedne dimenzije, na primer, linearna sa promenom temperature, onda takve supstance mogu biti upotrebljene za termometre.

Linearno širenje



Slika 2.3: Promena dužine tankog štapa pri zagrevanju.

Ako promena temperature, ΔT , nije prevelika, eksperiment pokazuje da je često promena dužine, ΔL , nekog tankog tela proporcionalna promeni temperature:

$$\Delta L \propto \Delta T.$$

Eksperiment, odnosno iskustvo, takođe pokazuje da promena dužine zavisi i od materijala od koga je telo napravljeno. Sa druge strane, promena dužine zavisi i od dužine tela, tako da promena dužine može da se napiše kao:

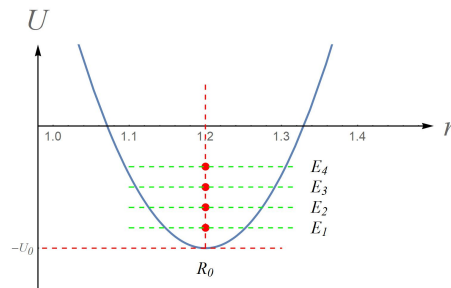
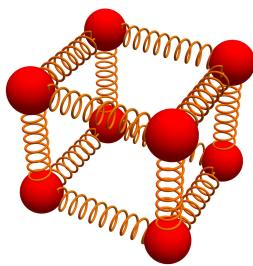
$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T, \quad (2.1)$$

gde je α koeficijent linearnog širenja materijala. Jedinica mu je K^{-1} , što je isto što i $^{\circ}C^{-1}$. Linearni koeficijent širenja ima smisla definisati samo za čvrsta tela.

Dužina tela posle zagrevanja je:

$$L = L_0 + \Delta L = L_0 (1 + \alpha \Delta T). \quad (2.2)$$

Telo ne mora da bude tanko, gornji izraz važi i za promenu dužine tela duž bilo kog pravca, ali koeficijent α ne mora da bude isti za svaki pravac. Tela kod kojih koeficijent širenja zavisi od pravca širenja nazivaju se *anizotropna* tela. Nasuprot njima tela kod kojih koeficijent širenja ne zavisi od pravca širenja nazivaju se *izotropna* tela.

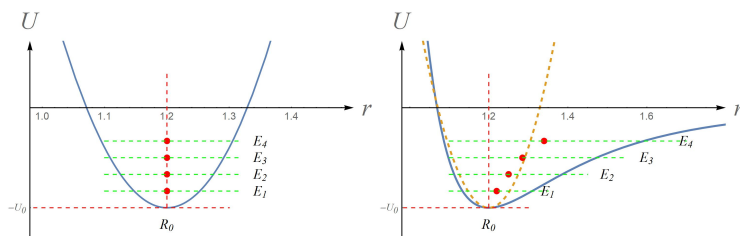


Slika 2.4: Kristalna rešetka kao sistem harmonijskih oscilatora, i potencijalna energija harmonijskog oscilatora.

Kako bi moglo da se objasni širenje tela na molekularnom nivou? Molekuli u nekom kristalu (čvrstom telu) osciluju oko ravnotežnih položaja, i mogu se dosta dobro aproksimirati skupom harmonijskih oscilatora, kao na slici 2.4. Potencijalna energija oscilatora je data na desnom delu slike. Iako je harmonijska aproksimacija vrlo dobra za objašnjenje mnogih efekata u fizici kristala, u okviru nje ne može da se objasni termalno širenje.

Zagrevanje tela je zapravo povećavanje energije tela. Na slici je dato nekoliko energija, $E_1 - E_4$. Za svako stanje sa odgovarajućom

energijom može da se odredi srednje rastojanje između molekula. Ono što se vidi na slici je da se sa povećanjem temperature (energije) povećavaju amplitude oscilovanja molekula, ali ravnotežno rastojanje između molekula se ne menja. Dakle, u okviru harmonijskog modela nije moguće da se telo raširi zbog zagrevanja.



Razmotrimo sada model u kome potencijalna energija ima oblik:

$$U = U_0 \left(\left(\frac{R_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^6 \right), \quad (2.3)$$

gde konstante U_0 i R_0 zavise od sistema. Oko ravnotežnog položaja, R_0 , kao što se vidi na slici 2.5, harmonijski potencijal se dobro slaže sa ovim potencijalom, ali odstupanje je drastično za rastojanja veća od ravnotežnog. Ako se nađu srednja rastojanja između molekula sa potencijalom 2.3, vidi se da se srednje rastojanje povećava sa povećanjem energije (zagrevanjem). Dakle, ovaj potencijal može sasvim dobro da opiše termalno širenje materijala.

Koeficijent termalnog širenja nije konstantan u realnom slučaju. On može da zavisi i od temperature. Telo ne mora da se širi na isti način na niskim temperaturama kao na visokim. Ipak, za relativno male promene temperature oko sobne temperature, može se uzeti da je koeficijent konstantan.

Zapreminsko širenje

Ma koliko da je telo tanko ono se pri zagrevanju širi u svim pravcima. Zapremina tela se menja pri zagrevanju, uz iste argumente kao za linearno širenje, kao:

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T. \quad (2.4)$$

gde je β koeficijent zapreminskog širenja tela. Za izotropna čvrsta tela je $\beta = 3\alpha$.

U tabelama 2.1 i 2.2 su date vrednosti koeficijenata za nekoliko materijala, linearni za nekoliko čvrstih, a zapreminski za tečnosti. Ako ih uporedite videćete da se tečnosti više šire pri zagrevanju od čvrstih materijala. Zato sudovi koji su napunjeni do vrha tečnošću pucaju pri zagrevanju.

Voda

Na početku lekcije je pomenuto da se skoro sve supstance pri zagrevanju šire. Jedan od izuzetaka je voda. Na temperaturama od o

Slika 2.5: Različiti modeli potencijala za molekule u nekoj supstanci. Levo je dat harmonijski potencijal koji je dosta dobra aproksimacija oko ravnotežne konfiguracije. Na desnoj slici je dat pravi potencijal kojim može jednostavno da se opiše termalno širenje.

Tabela 2.1: Koeficijent linearnog širenja za nekoliko materijala, na temperaturi od 20°C.

Materijal	α (10^{-5}K^{-1})
Aluminijum	2.4
Mesing	2
Bakar	1.7
Staklo	0.4–0.9
Čelik	1.2

Tabela 2.2: Koeficijent zapreminskog širenja za nekoliko materijala, na temperaturi od 20°C. Pri poređenju podataka treba voditi računa da podatke iz tabele 2.1 treba pomnožiti sa tri.

Materijal	β (10^{-5}K^{-1})
Etanol	75
CS ₂	115
Glicerol	49
živa	18

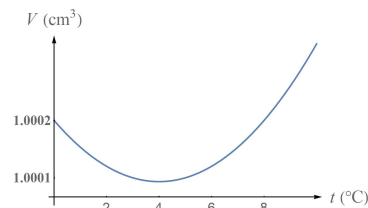


Slika 2.6: Mostovi se sastoje od ploča koje su malo razmaknute jedna od druge. Na tim razmacima se nalaze „češljevi“, koji služe da taj razmak bude na svim temperaturama pokriven na kolovozu.

do 4°C voda se skuplja prilikom grejanja, odnosno širi tokom hlađenja. Promena zapremine vode sa temperaturom prikazana je na slici 2.7. U tom intervalu temperatura β je negativno. Ovaj grafik takođe ilustruje da β nije konstantno, već da zavisi od temperature.

Još nekoliko važnih detalja sledi iz grafika 2.7, u uočenom opsegu temperatura.

- Puna boca vode će pući u zamrzivaču zato što se voda širi tokom hlađenja blizu temperature mržnjenja.
- Led ima manju gustinu od vode.
- Voda na različitim temperaturama ispod 4°C , ima različite gustine. Pri tome je najgušća voda ona čija je temperatura 4°C .
- Voda koja je hladnija od 4°C je ređa i u velikoj masi tečnosti isplivava na vrh. Na samom vrhu hladne vode će biti najhladnija voda.
- Dolazi do cirkulacije vode, tako da ona hladnija ide na vrh, zaledi se dok toplija ide na dno i ostaje tečna.
- Zbog ove anomalije vode, voda se ledi od vrha ka dnu. Ako je voda duboka, ma koliko bila niska temperatura vazduha iznad vode, voda će se zalediti samo na površini, sloj leda može da bude debeo, ali na dnu ostaje tečna voda, koja je sasvim sigurno na temperaturi od 4°C . Zbog toga mora i okeani nikad nisu potpuno zaleđeni, što omogućava opstanak živog sveta u vodi i na niskim temperaturama atmosfere.
- Ovome treba dodati i to da je led dobar toplotni izolator, pa omogućava efikasno hlađenje vode ispod leda.
- Ostale tečnosti se obično lede od dna ka vrhu, pa ne bi ostale tečne na dnu na niskim temperaturama.



Slika 2.7: Zapremina 1g vode u funkciji temperature.

Anomalija sa negativnom koeficijentom zapreminskog širenja vode nije jedina neobična pojava na planeti, koja je vrlo korisna za živi svet. Može da se dođa da je procenat kiseonika u atmosferi optimalan. Da je veći procenat atmosfere bi zapravo bila otrovna, pošto je kiseonik vrlo jako oksidaciono sredstvo a manji procenat bi bio prepreka najvećem broju živih organizama. Magnetno polje Zemlje, ima ulogu štita od kosmičkog zračenja, koje je izuzetno destruktivno po živi svet. Rastojanje do Sunca koje omogućava da na Zemlji temperatura bude u vrlo „prijatnom“ intervalu. Da li je život nastao upravo zbog ovakvih uslova ili bi nastao i pri drugačijim, vrlo je zanimljivo i otvoreno pitanje. Verovatno je samo procenat kiseonika nešto što nije bilo neophodno za pojavu živog sveta, ali sa drugačijom atmosferom i oblici života bi bili drugačiji.

Količina toplote

U šolju sa vrelim čajem spustite metalnu kašičicu. Osetićete da se kašičica brzo zagrejala. Ono što u tako kratkom vremenu ne možemo da osetimo je da se i čaj malo ohladio zbog zagrevanja kašičice. Dakle, kada se dva tela na različitim temperaturama dovedu u kontakt dolazi do razmene energije, odnosno toplote. Razmena traje sve dok se ne uspostavi toplotna ravnoteža. Može da se kaže da je uspostavljanje toplotne ravnoteže posledica razmene energije, odnosno toplote.

Mera prenete toplote je fizička veličina *količina toplote*, Q . Pošto je količina toplote energija, jedinica je džul, J. Alternativa jedinica je kalorija, cal: $1\text{ cal} = 4.186\text{ J}$.

Ovo je dobro mesto da se podvuče razlika između temperature i toplote.

Količina toplote od 1 kalorije je jednaka toploti koju je potrebno dovesti jednom gramu vode, da joj se temperatura promeni za jedan stepen (K ili $^{\circ}\text{C}$, svedeno). Postoji i nutritivna kalorija (ona o kojoj govore stručnjaci za zdravu i manje zdravu hranu), koja je $1\text{ Cal} = 4186\text{ J}$. Dakle 1000 puta je veća od standardne kalorije koja se koristi u nauci.

Temperatura:

- jedan od parametara koji karakteriše stanje sistema;
- kvantitativna mera zagrejanosti sistema;

Toplota:

- energija koju razmenjuju sistemi na različitim temperaturama;
- nije karakteristika sistema pa nema smisla govoriti o toploti jednog sistema.

Dobar primer za razliku između toplote i temperature je sistem koji može da se podeli na dva, na primer jednaka, dela. Temperature dobijenih sistema će posle podele biti jednake. Ali ako hoćemo da zagrejemo jedan od podsistema do neke temperature biće nam potrebno dva puta manje toplote da to učinimo nego za ceo sistem pre podele, i ako su i početna i krajnja temperatura za ovakav proces jednake.

Specifična toplota

Iskustvena činjenica da toplota, koju treba dovesti nekom sistemu da bi mu se temperatura promenila za određenu vrednost, zavisi od veličine sistema je dobra polazna osnova za detaljniju analizu. Od čega sve može da zavisi količina toplote potrebna da neki sistem zagrejemo do određene temperature? Logično je da količina toplote zavisi od mase sistema. Što je telo veće mase treba nam veća količina toplote. Količina toplote koju treba dovesti zavisi i od vrste supstance u sistemu.

Količina toplote može da se zapiše kao:

$$Q = mc\Delta T, \quad (2.5)$$

odnosno:

$$dQ = mc dT. \quad (2.6)$$

Ovde je c specifična toplota supstance, i ona je jednaka:

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}, \quad (2.7)$$

odnosno predstavlja količinu toplote potrebnu da se dovede sistemu da bi mu se temperatura povećala za jedan stepen.

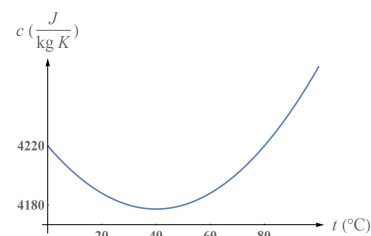
Specifična toplota nije konstantna veličina, ona zavisi od temperature sistema, kao što ćete videti u toku kursa. Međutim, u uskim intervalima temperatura može često da se uzme da je c konstanta.

Na slici 2.8 je prikazana zavisnost specifične toplote vode od temperature. Očigledno nije konstantna, ali ako se pažljivije pogleda vrednost varira unutar 1% za temperature od 0 do 100°C, tako da se prilično bezbedno može uzeti da je specifična toplota vode u tečnom stanju približno konstantna.

Pored specifične toplote može da se definiše i molarni toplotni kapacitet. Masa supstance je jednaka proizvodu količine supstance i molarne mase:

$$m = \nu M,$$

Ako pečemo u rerni komad od dva kilograma mesa, sigurno će nam biti potrebno više vremena, a to znači više energije tj. toplote nego za komad od kilograma mesa (ako pečemo na istoj temperaturi). Sa druge strane vreme pečenja, samim tim potrebna energija, zavisi i od supstancije koju grejemo. Kilogram testa za hleb se ne peče dugo kao i kilogram mesa na istoj temperaturi.



Slika 2.8: Specifična toplota vode.

Odbrambeni mehanizam čoveka zahteva dosta energije. Povišena temperatura, kao reakcija tela na infekciju, zahteva dodatnu energiju od tela. Zato nas povišena temperatura iscrpljuje.

tako da je:

$$Q = mc\Delta T = \nu Mc\Delta T = \nu C\Delta T.$$

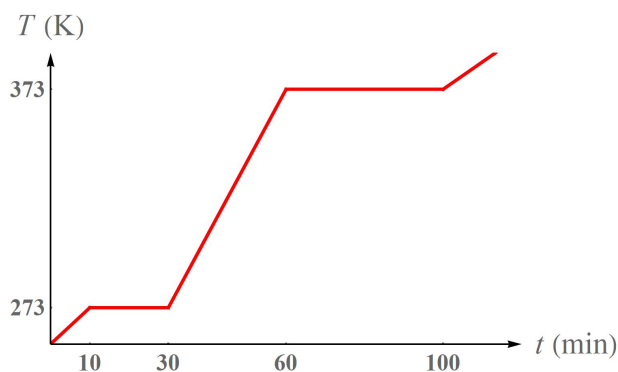
Molarni toplotni kapacitet, koji predstavlja količinu toplote potrebnu da se dovede jednom molu supstance da bi se zagrijala za jedan stepen, je:

$$C = \frac{1}{\nu} \frac{dQ}{dT}. \quad (2.8)$$

Molarni toplotni kapacitet je mnogo podesniji za poređenje različitih supstanci od specifične toplote, kao što je prikazano u tabeli 2.3. Uočite da i pored velike varijacije specifičnih toplota, molarni toplotni kapaciteti se ne razlikuju toliko mnogo za sve prikazane supstance. Uporedite na primer gvožđe i olovo. Zašto su molarni toplotni kapaciteti toliko slični, biće reči u narednim poglavljima.

Fazni prelazi – latentna toplota

Kada se nekom sistemu dovodi toplota ne mora sva toplota da ode na povećanje temperature. Može da dođe i do faznog prelaza.



Faza je određena vrsta uređenja materije. Najčešći primer je agregatno stanje, ali nisu samo agregatna stanja faze materije. Promena faze sistema je fazni prelaz.

Ako fiksiramo pritisak nekog sistema fazni prelaz se dešava na tačno određenoj temperaturi. Tokom faznog prelaza sistem razmenjuje toplotu sa okolinom i dolazi do promene zapremine i gustine supstance (ako govorimo o agregatnim stanjima).

Neka u sudu imamo kocku leda na temperaturi 0°C. Dovođenjem toplote led se neće zagrevati već će početi da se topi (slika 2.9). Temperatura će mu biti konstantna sve dok se sav led ne otopi. Tek kada se sav led otopi temperatura vode počinje da raste, ako joj se i dalje dovodi toplota. Dakle, da bi se led otopio, i ako je na temperaturi topljenja potrebna mu je toplota.

Toplota potrebna za neki fazni prelaz naziva se *latentna toplota faznog prelaza*. U gornjem primeru to bi bila latentna toplota topljenja leda ($q = 3.34 \times 10^5 \frac{J}{kg}$). Latentna toplota se definiše u odnosu na jedinicu mase, tj. to je tj. toplota koju treba dovesti 1kg neke supstance da bi kompletna količina napravila fazni prelaz.

Bez obzira na to na šta naziv sugerise toplotni kapacitet nije veličina koja je mera koliko telo ima toplote, pošto jedno telo nema toplotu. Toplotni kapacitet je mera toga kako telo reaguje na dovedenu toplotu, odnosno koliko mu toplote treba da se zagreje.

Tabela 2.3: Specifične toplote i molarni toplotni kapaciteti nekih sustanci.

Sistem	$c \frac{J}{kgK}$	$C \frac{J}{molK}$
Al	910	24.6
Be	1970	17.7
Cu	390	24.8
Etanol	2428	111.9
Led	2100	37.8
Fe	470	26.3
Pb	130	26.9
NaCl	879	51.4
H ₂ O	4190	75.4

Slika 2.9: Promena temperature leda tokom vremena, kome se dovodi ista količina toplote u jedinici vremena.

Latentna toplota isparavanja vode je $q_i = 2.256 \times 10^6 \frac{J}{kg}$. Obratite pažnju da je za kompletno isparavanje jednog litra vode na 100°C, potrebna više nego pet puta veća energija nego za zagrevanje jednog litra od 0 do 100°C.

Toplota potrebna za fazni prelaz proizvoljne mase supstance je:

$$Q = mq.$$

Fazni prelaz je reverzibilan proces. U gornjem primeru je proces obrnut topljenju, mržnjenje. Pošto je za topljenje potrebno dovesti toplotu ledu, voda pri mržnjenju oslobađa toplotu.

- Topljenje: $Q = mq_t$,
- Mržnjenje: $Q = -mq_t$,

gde je q_t latentna toplota topljenja leda/mržnjenja vode. Pored toga, na fiksiranom pritisku temperatura topljenja leda je jednaka temperaturi mržnjenja vode. Na ovoj temperaturi tečna faza (voda) i čvrsta faza (led) su u ravnoteži, *faznoj ravnoteži*.

Popuno ista slika je za sve ostale fazne prelaze: ključanje/kонденzovanje, sublimacija/očvršćavanje...

Ako se pritisak sistema, na primer vode, u blizini temperature faznog prelaza promeni, promeniće se i temperatura faznog prelaza. O tome će više biti reči pri kraju knjige.

Činjenica da je za isparavanje vode potrebno dovesti toplotu, leži u osnovi mehanizma hlađenja mnogih životinja, pa i čoveka. Znoj na površini kože isparava, za to mu je potrebna toplota. Dobija je od tela, tako isparava, a telo pošto predaje toplotu se hladi.

Sagorevanje neke supstancije takođe predstavlja jednu vrstu faznog prelaza. Pri sagorevanju se oslobađa toplota. Na primer latentna toplota sagorevanja benzina je $q_s = 4.6 \times 10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

Mehanizmi prenošenja toplote

Toplotu sistemi mogu razmenjivati na tri načina:

- provođenjem,
- strujanjem (konvekcijom),
- zračenjem.

Provođenje toplote

Zamislite sledeći ogled. Na metalnu šipku su voskom zalepljeni ekseri na jednakim razmacima. Jedan kraj šipke se greje plamenom. Kako se šipka zagreva tako ekseri otpadaju, i to prvo onaj najbliži plamenu, pa za njim sledeći, i tako dalje.

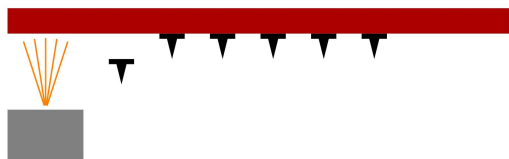
Ovaj ogled pokazuje da se toplota ne prenosi trenutno kroz sistem, već putuje konačnom brzinom.

Sistem se zagreva zbog toga što mu se dovodi toplota. Usled zagrevanja molekuli intenzivnije osciluju, odnosno osciluju sa većom amplitudom (pogledajte sliku 2.5). Prvi su na udaru molekuli neposredno do granice sa telom od koga dobijaju toplotu. Njihovo intenzivnije oscilovanje se prenosi na ostale molekule u sistemu, sve dok konačno ne počnu da utiču na kretanje molekula na drugom kraju

Nekada je centralno grejanje bilo parno grejanje (možda znate neke starije ljude koji ga i dalje tako zovu). Sistem grejanja nije isti, iako je sličan. Kod parnog grejanja u grejnim telima nije vrela voda, nego vodena para. Od trenutka kada vodena para dođe do grejnog tela ova vrsta grejanja je mnogo efikasnija. Para se kondenzuje, oslobađa značajnu količinu toplote (veću nego što vrela voda predaje hladnijem vazduhu). Problem je u tome što nije naročito isplativo dovesti paru, umesto tople vode do svakog korisnika.

Primer za sublimaciju je isparavanje leda. Verovatno ste videli po terasama da se već suši i zimi na veoma niskim temperaturama. Mnogo se sporije osuši, ali se ipak osuši. Suši se zato što led (ako se odeća zaledila) takođe može da isparava, bez topljenja.

Na nekom letnjem izletu može da se proveriti mehanizam hlađenja kod životinja. Uzme se lubenica, umota u veliku krpu i postavi pod direktne Sunčeve zrake, i dobro pokvasi. Kako se krpa suši tako je potrebno dodatno je kvasiti. Posle nekog vremena lubenica će biti приметно hladnija.



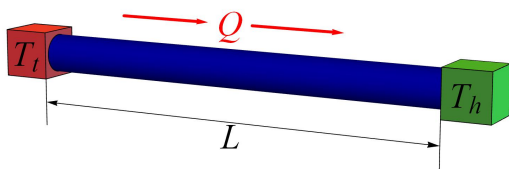
Slika 2.10: Ogled sa provođenjem toplote kroz tanak štap.

provodnika. Molekuli sa većom energijom se ne kreću kroz provodnik slobodno, već samo utiču na kretanje svojih suseda, ovi dalje utiču na svoje susede sve dok toplota ne prođe sasvim kroz provodnik. Nema makroskopskog kretanja molekula, samo se energija, tj. toplota prenosi.

Ispostavlja se da se toplota ovako prenosi u vrlo lošim toplotnim provodnicima. U dobrim provodnicima toplote ona se sasvim drugačije prenosi. Supstance koje imaju skoro slobodne elektrone vrlo dobro provode toplotu. Elektroni koji su skoro slobodni, radijusa kretanja gotovo neuporedivo većeg od molekula, sudaraju se sa drugim elektronima i tako prenose energiju. Njihova masa jeste bar tri reda veličine manja od mase molekula, odnosno preciznije jona, ali im je zato brzina mnogo veća, a kinetička energija zavisi od mase, ali i od kvadrata brzine.

S obzirom da električnu struju provode supstance sa skoro slobodnim elektronima, a to su metali, onda je jasno i da su metali dobri provodnici toplote. Zato nam metalni predmet uvek deluje hladnije od temperature vazduha u okolini, kada ga dodirnemo. Toplota koja se prenese sa dlana na metalni predmet vrlo brzo se odvede dalje, pa imamo utisak da je telo hladnije.

Važno je uočiti, a i svi eksperimenti to potvrđuju, da se toplota spontano prenosi isključivo od toplijeg tela na hladnije telo.



Slika 2.11: Provođenje toplote kroz tanak cilindar.

Na slici 2.11 je prikazana shema toplotnog provodnika. Neka to bude tanak štap, dobro izolovan od okoline, tako da se toplota prenosi samo kroz njega. Pitanje je koliko toplote se prenese kroz provodnik u jedinici vremena ($\frac{dQ}{dt}$), i od čega to sve zavisi. Eksperiment pokazuje, a i lako se da zaključiti sledeće:

- Količina toplote koja može da se prenese kroz neki provodnik zavisi od materijala od koga je provodnik napravljen.
- Što je provodnik uži, to je manje toplote moguće provesti kroz njega, i obrnuto, što je širi to je moguće da prođe više toplote u jedinici vremena.
- Što je provodnik duži to je potrebno više vremena da toplota prođe, odnosno manje toplote u jedinici vremena prolazi kroz pro-

Pošto postoji očigledna analogija sa provođenjem električne struje, moguće je definisati i toplotnu otpornost, kao recipročnu veličinu toplotne provodnosti, pomnoženu dužinom toplotnog puta.

vodnik.

- Što je veća razlika temperatura na krajevima provodnika to će više toplote proći u jedinici vremena.

Ako ova zapažanja pretvorimo u jednačinu, onda je toplotna struja, kako se naziva $\frac{dQ}{dt}$, jednaka:

$$\frac{dQ}{dt} = \kappa S \frac{T_t - T_h}{L}, \quad (2.9)$$

gde su:

- κ , toplotna provodnost materijala,
- S , poprečni presek provodnika,
- L , dužina provodnika, odnosno često se zove i dužina toplotnog puta,
- T_t i T_h temperature toplijeg i hladnijeg tela na krajevima provodnika.

U infinitezimalnom slučaju:

$$\frac{T_t - T_h}{L} \rightarrow \frac{dT}{dx},$$

je gradijent temperature.

Jednica za toplotnu struju je ista kao za snagu, vat (W). Odatle se vidi da je jedinica za toplotnu provodnost $\frac{W}{Km}$.

I za gasove se može definisati toplotna provodnost, ali to se odnosi na gasove koji su zarobljeni u nekom relativno malom prostoru u kojem je makroskopsko kretanje zanemarljivo. Toplotna provodnost vazduha u tabeli 2.4 je data za vazduh koji miruje.

Konvekcija – strujanje

Drugi način prenošenja toplote je strujanje ili konvekcija. Strujanje se javlja u situacijama kada je neko telo okruženo fluidom koji može da se kreće.

Primeri za strujanje su grejanje putem vazduha koji je zagrejala grejalica, koji dalje greje predmete u prostoriji, zatim hlađenje motora vodom, vodeno hlađenje procesora u računarima, strujanje toplog vazduha u modernim pećnicama (rernama), krvotok i mnogi drugi.

Ako se fluid spontano kreće govori se o *spontanom strujanju*. Različite temperature u prostoru u kome ima fluida izazivaju lokalno različite gustine, što dalje izaziva kretanje fluida koji teži da izjednači gustinu u celom prostoru. Ako se prinudno kreće onda je po sredi *prinudno strujanje*. Prinudno strujanje je razmena toplote krvotokom u ljudskom telu, hlađenje vrele supe duvanjem u kašiku, hlađenje ventilatorom i slično.

Spontano strujanje za cilj ima uspostavljanje toplotne ravnoteže u celom prostoru. Primer za spontano strujanje je kretanje velikih vazдушnih masa u atmosferi, kretanje morskih i okeanskih struja, termali (vetrovi koji duvaju skoro vertikalno zbog toga što se zagrejani vazduh penje ka višim slojevima atmosfere).

Tabela 2.4: Toplotne provodnosti različitih materijala.

Materijal	$\frac{W}{Km}$
Al	205
Cu	385
Ag	406
čelik	50.2
cigla	0.15
cigla (blok)	0.6
beton	0.8
staklo	0.8
led	1.6
stiropor	0.01
drvo	0.04-0.12
vazduh	0.024

Stiropor i vuna su loši provodnici toplote odnosno dobri toplotni izolatori upravo zbog vazduha koji je zarobljen u njihovim strukturama. Stiropor je, u stvari, jedinjenje polistiren. Stiropor je naziv proizvoda koji je nekadašnji proizvođač upotrebio za svoju vrstu polistirena. Danas je propali proizvođač potpuno zaboravljen ali naziv je ostao u upotrebi. Slično kao što je digitron naziv nekadašnje fabrike kalkulatora.

Na ovom nivou ne može da se napravi jednostavan model, ali neki zaključci se mogu izvesti.

- Toplotna struja je proporcionalna površini tela. Sa veće površine telo može da preda više toplote okolnom fluidu, ili da primi više toplote od fluida.
- Što je fluid viskozniji toplota se teže razmenjuje. Fluid se teže spontano pokreće, pa je i hlađenje/grejanje manje efikasno. Ali prinudno kretanje može da doprinese boljoj razmeni toplote.
- Eksperimentalno je utvrđeno da je toplotna struja zavisi od razlike temperatura, ali ne linearno, $\frac{dQ}{dt} \propto (T_t - T_h)^{5/4}$.

Zračenje

Prenos toplote može da se vrši i putem elektromagnetnih talasa, odnosno toplotnim zračenjem. Zagrevanje površine Zemlje i atmosfere elektromagnetnim talasima sa Sunca, zračenje usijanih tela, otvorenog plamena i slično.

Zapravo, ispostavlja se da svako telo, odnosno svaki sistem, zrači. Toplotno zračenje je najčešće u infracrvenom delu spektra. Vrlo zagrejana tela mogu da zrače i u vidljivom delu spektra, pa se tako govori o crvenom usijanju (temperatura oko 800°C) ili belom usijanju (temperatura oko 3000°C).

Izračena ili apsorbovana toplotna struja zavisi od:

- površine tela,
- četvrtog stepena temperature, T^4 ,
- emisivnosti tela (biće definisana niže).

Sabrane u jednačinu ove činjenice daju poznati Štefan-Bolcmanov zakon zračenja:

$$\frac{dQ}{dt} = e\sigma ST^4, \quad (2.10)$$

gde je σ Štefan-Bolcmanova konstanta

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4},$$

S je površina tela, e emisivnost tela.

Svako telo koje zrači energiju zato što se nalazi na nekoj temperaturi, istovremeno i apsorbuje energiju emitovanu od tela u okolini. U trenutku kada dođe do uspostavljanja toplotne ravnoteže energija koju telo izrači jednaka je energiji koju telo apsorbuje.

Ako je temperatura okoline T_o , onda je apsorbovana toplotna struja:

$$\frac{dQ}{dt} = e\sigma ST_o^4. \quad (2.11)$$

Telo koje je na temperaturi T nalazi se u kontaktu sa okolinom koja je na temperaturi T_o . Tada je rezultujuća toplotna struja:

$$\frac{dQ}{dt} = e\sigma S (T^4 - T_o^4). \quad (2.12)$$

Vratimo se grejalici i ostalim grejnim telima. Grejalica zagreva vazduh koji se širi po prostoriji, ali pored toga ona i zrači i zračenjem greje zidove i predmete u prostoriji, koji onda takođe greju vazduh. Takvo grejanje je ipak efikasnije od grejanja klima uređajima. Možda za isto vreme klima uređaj potroši manje energije, ali čim se isključi oseća se pad temperature. Sa druge strane grejalica greje i predmete, a i neko vreme posle isključivanja je i dalje topla, pa pad temperature nije tako drastičan. Dakle, ona može kraće da radi nego klima uređaj, a da efekat bude skoro isti.

Ako je $\frac{dQ}{dt}$ pozitivno, telo predaje toplotu okolini, ako je negativno, onda telo apsorbira toplotu.

Svaki dobar emiter toplote je i dobar apsorber. Idealan emiter i apsorber je apsolutno crno telo. Sva toplota koja se preda apsolutno crnom telu se apsorbira. Apsolutno belo telo je telo koje reflektuje svu toplotu koja mu se predaje.

Emisivnost, e , je odnos toplotne struje tela i apsolutno crnog tela iste površine i na istoj temperaturi.

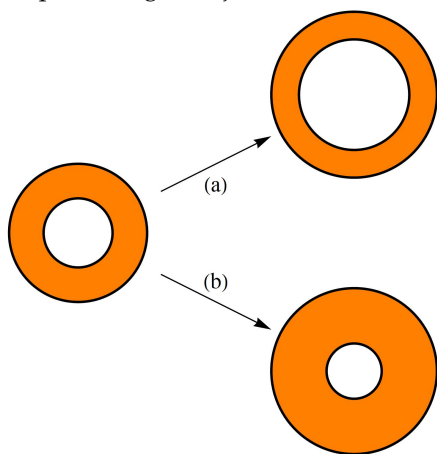
Zadaci

Temperatura

- 2.1 Kada izmerite telesnu temperaturu, termometar će pokazivati temperaturu kojeg sistema?
- 2.2 Nepažljivi tata je na plaži ostavio termometar na peškiru, tako da je ovaj bio obasjan sunčevim zracima. Posle nekog vremena je primetio šta je uradio, uzeo termometar i usput pogledao koju temperaturu pokazuje. Da li je termometar pokazivao temperaturu Sunca? Ako nije, šta je izmerio?
- 2.3 Pronađite podatak o temperaturi na površini i u unutrašnjosti Sunca. Pokušajte da smislite objašnjenje zašto je temperatura korone veća, i to značajno veća od temperature na površini.

Toplotno širenje

- 2.4 Cev poprečnog preseka kao sa slike se zagreva. Kako će izgledati poprečni presek cevi posle zagrevanja? Kao na slici (a) ili (b)?



- 2.5 Pokažite da je zapreminski koeficijent širenja $\beta = 3\alpha$, za homogena tela.
- 2.6 Dužina bakarne žice na dalekovodu je 50 km,

mereno na temperaturi od 20°C . Kolika je dužina žice na 40°C ?

- 2.7 Kako se sa slike 2.7 vidi da koeficijent zapreminskog širenja β vode nije konstantan?

Količina toplote

- 2.8 Kolika je količina toplote potrebna da čoveku od 80 kg telesna temperatura skoči sa 37 na 39°C ? Pretpostaviti da je ljudsko telo uglavnom od vode.
- 2.9 Koliko (nutritivnih) kalorija treba bolesnik iz prethodnog zadatka da pojede da bi povratio izgubljenu energiju, ako se polovina unesene energije ne iskoristi?
- 2.10 Kroz silicijumski čip mase $m = 23\text{mg}$, protiče struja koja mu predaje energiju snagom 7.4 mW . Ako nema hlađenja za koliko se promeni temperatura čipa za jedan sekund? ($c = 705 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$)
- 2.11 Želite da napravite idealnu šolju za čaj za one koji vole da im se čaj sporo hladi. Da li materijal od koga je šolja treba da ima veliku ili malu specifičnu toplotu?
- 2.12 Da li postoji razlika, što se prenesene energije tiče, između sistema grejanja koji koristi vodu na 100°C , i sistema koji koristi vodenu paru na istoj temperaturi? Objasnite.

Prenošenje toplote

- 2.13 Na osnovu analogije između toplotne i električne provodnosti definišite toplotnu otpornost.
- 2.14 Neka je površina ljudskog tela približno $S = 1.2\text{m}^2$, temperatura kože oko 30°C , temperatura okoline 20°C , za emisivnost može da se uzme da je 1. Kolika je toplotna struja emitovane toplote? Kolika je rezultujuća toplotna struja?

- 2.15 Termos boca služi da tečnost sipana u nju dugo zadrži temperaturu. Kako je konstruisana termos boca i kako takva konstrukcija sprečava prenos toplote?
- 2.16 Verovatno znate nekoga, ili i sami pripadate toj školi mišljenja koja tvrdi da je grejanje klima uređajima mnogo efikasnije, kao i da se manje troši energije nego pri grejanju standardnim električnim grejalicama. Prikupite podatke na osnovu kojih možete da odgovorite na pitanje kakva vrsta grejanja je efikasnija (po potrošnji električne energije).
- 2.17 Uzmite dva krompira i oljuštite ih. Jedan zamotajte u aluminijumsku foliju. Oba stavite u rernu da se peku. Kada budu gotovi i izvučeni iz rerne već posle nekoliko desetina sekundi možete da dodirnete foliju u kojoj je nalazi krompir. Ako biste dodirnuli drugi, neumotani, krompir mogli biste da se opečete. Zašto?
- 2.18 Neko voli da pije vruću kafu sa mlekom. Mleko, da se ne bi pokvarilo stoji u frižideru. Da li će kafa sa mlekom biti toplija, ako odmah po kuvanju sipate u vrelu kafu hladno mleko i čekate pet minuta da se ohladi ili čekate pet minuta da se hladi kafa i tek onda sipate hladno mleko (koje do tada bilo u frižideru)? Obrazložite odgovor.

3

Termalne osobine materije

Jednačina stanja sistema

Stanje nekog sistema se opisuje vrednostima parametara stanja: p , V , T , ν ... Nije moguće promeniti jedan od parametara, a da se ne promeni i neki drugi. Kada postoji koliko-toliko jednostavna veza između parametara, onda se takva analitička veza naziva *jednačinom stanja*.

Na osnovu iskustva znamo da zapremina sistema zavisi od temperature i pritiska, pa je kao funkciju ove dve promenljive možemo razviti u red, zadržati samo na prvim članovima. Konstante iz razvoja se mogu odrediti merenjem. Ovakvu vezu je uvek moguće naći, ali ona dobro opisuje samo jedan sistem. Da bismo mogli da sagledamo nešto opštiju sliku potreban nam je dobar model koji opisuje čitavu klasu sistema, i jednačina stanja za takav model.

Idealan gas

Serijska merenja na različitim gasovima pokazala je sledeće:

- Ako se pritisak i temperatura ne menjaju ($p = \text{const}$, $T = \text{const}$) onda je zapremina proporcionalna količini supstance, $V \propto \nu$, gde je ν količina supstance $\nu = \frac{m}{M}$.
- Ako su temperatura i količina supstance konstantni ($T = \text{const}$, $\nu = \text{const}$) onda je zapremina obrnuto srazmerna pritisku $V \propto \frac{1}{p}$, što znači da je $pV = \text{const}$.
- Ako su zapremina i količina gasa konstantne onda je pritisak proporcionalan temperaturi, $p \propto T$ (kao u gasnom termometru).

Uzimajući sve u obzir dobija se:

$$pV = \nu RT, \quad (3.1)$$

gde je R univerzalna gasna konstanta, $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$.

Gornja jednačina se naziva jednačinom stanja idealnog gasa, i to je aproksimativna jednačina, odnosno odgovara modelu idealnog gasa. U modelu idealnog gasa se pretpostavlja sledeće:

- Dimenzije molekula su zanemarljivo male, odnosno molekuli su praktično tačkasti.

Neka sistem ima zapreminu V_0 , pritisak p_0 i temperaturu T_0 . Ako se pritisak i temperatura malo promene onda zapremina tela može da se napiše kao:

$$V = V_0 (1 + \beta (T - T_0) - \kappa (p - p_0)).$$

Ovo je vrlo opšta jednačina stanja za koju je neophodno naći koeficijente β , κ , na primer iz eksperimentalnih rezultata.

Termin *normalni uslovi* se često koristi. Normalni uslovi odgovaraju temperaturi od $T = 273.15\text{K}$ i pritisku od jedne atmosfere, $p = 10^5\text{Pa}$, kao što je već rečeno u zaglavlju tabele 1.1.

- Potpuno se zanemaruje interakcija između molekula.
- Realan gas može da zadovoljava ova dva uslova ako je koncentracija molekula relativno mala, tako da su molekuli u srednjem vrlo daleko jedan od drugog.
- Svi sudari molekula sa zidovima kao i međusobni sudari su apsolutno elastični.
- Obično se kaže da je model idealnog gasa dobar za gasove na visokim temperaturama i malim pritiscima (mada ovaj uslov mora preciznije da se definiše).
- Kao što će biti detaljnije analizirano kasnije, uslov za pritisak i temperaturu je zapravo uslov da su pritisak gasa i temperatura dovoljno daleko od vrednosti koje su potrebne za kondenzaciju gasa. Dakle, daleko od mogućnosti za fazni prelaz.

Realan gas

Sažeta definicija modela idealnog gasa je da je to gas neinteragujućih materijalnih tačaka. Ako bismo želeli da popravimo ovaj model, prvi koraci su da uračunamo to da molekuli imaju konačnu zapreminu, i da interakcija molekula utiče na pritisak gasa.

Pomenute popravke se sadrže u Van der Valsovoj jednačini:

$$\left(p + \frac{av^2}{V^2}\right)(V - vb) = \nu RT, \quad (3.2)$$

gde su a i b fenomenološke konstante za određenu vrstu gasa. Konstanta b je jednaka zapremini svih molekula u jednom molu gasa.

Parametar a karakteriše uticaj privlačne interakcije između molekula na pritisak gasa:

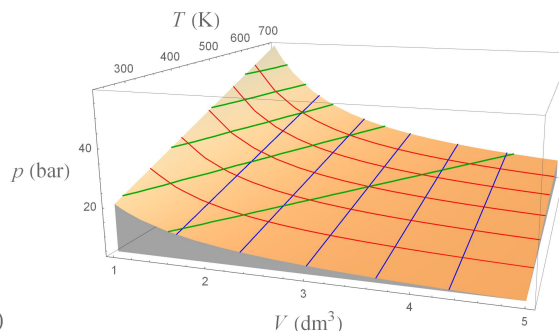
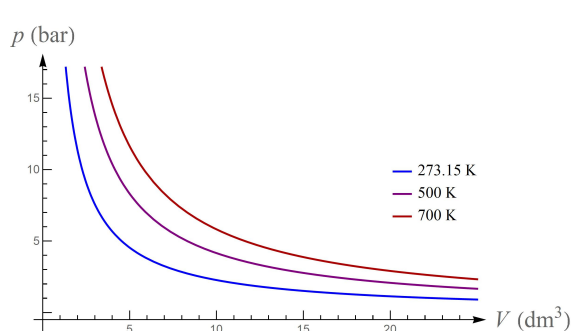
- pritisak gasa na zid suda je manji ako postoji privlačna međumolekulska interakcija nego ako je nema,
- efekat interakcije je veći što je više molekula u sudu, odnosno što je veća koncentracija molekula,
- na efekat utiče broj molekula koji su u blizini zida suda, kao i broj molekula koji ih privlače. Zato je popravka proporcionalna kvadratu koncentracije, $\frac{N}{V} \propto \frac{\nu}{V}$, gde je ν broj molova.

pV -dijagram

Za gasove postoje dva standardna modela, model idealnog i realnog gasa. Za fiksiranu količinu gasa pritisak je funkcija zapremine i temperature. Proces u kojima se menjaju parametri sistema se mogu grafički predstaviti na pV -dijagramu.

Ako je temperatura konstantna (izotermni proces) onda je za idealan gas pritisak obrnuto srazmeran zapremini, odnosno kriva koja opisuje ovaj proces je hiperbola, $p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{\text{const}}{V}$.

Poznato je da je pritisak na većim nadmorskim visinama manji od onog na nivou mora. Ali, nizak pritisak nije jedini razlog za otežano disanje na velikim visinama. Sposobnost tela da apsorbuje kiseonik opada sa pritiskom vazduha, tako da nije samo problem količina kiseonika na velikim visinama, nego i to što ga ne možemo iskoristiti u punoj meri. Apsorpcija kiseonika drastično opada na pritisku ispod 0.65 atm, što odgovara visini oko 4700 m. Posledica toga je da na visinama preko 6000 m nema stanovnika. Alpinisti koji se penju na veće visine od ove ne mogu proizvoljno dugo da borave na velikim visinama. Nedostatak kiseonika može da izazove ozbiljne zdravstvene probleme.



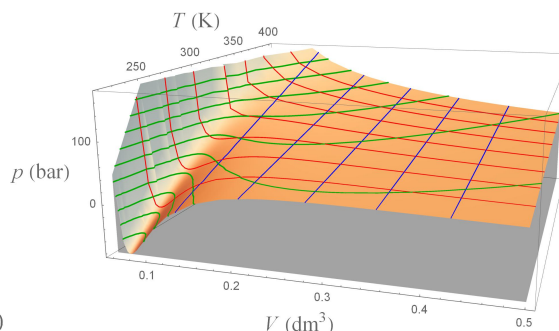
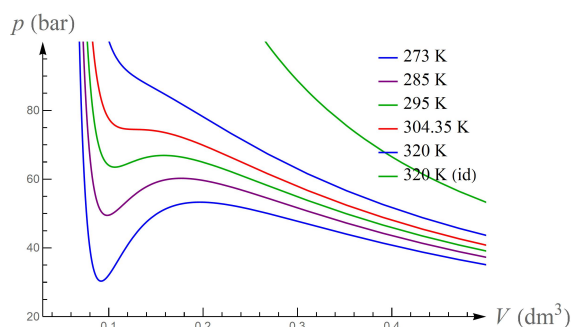
Slika 3.1: Izotermni procesi idealnog gasa za različite temperature. Na površi jednačine stanja, $p = f(V, T)$, izoterme su označene crvenim, izohore plavim a izobare zelenim linijama.

U opštem slučaju pritisak je funkcija dve promenljive i ta funkcija se može predstaviti kao površ na trodimenzionalnom grafiku. Sva stanja idealnog gasa su tačke na ovoj površi (slika 3.1 desno).

Proces u kome se zapremina ne menja (izohorski) ili onaj u kome se pritisak ne menja (izobarski) predstavljeni su pravim linijama (zeleni i plavi na slici 3.1 desno).

Izoterma realnog gasa ima malo složeniji oblik:

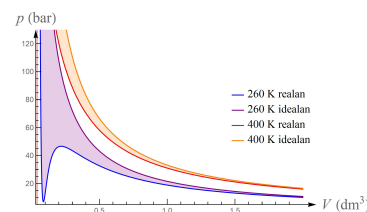
$$p = \frac{\nu RT}{V - b} - \frac{av^2}{V^2}.$$



Na slici 3.2 je dodata i jedna izoterma za idealan gas (320 K – id). Kao što se može videti ona prilično odstupa od izoterme realnog gasa na istoj temperaturi. Međutim da bi se dobro sagledale razlike potrebno je izoterme prikazati u nešto većem intervalu zapremina, odnosno koncentracija.

Na dve izdvojene izoterme (1 mol CO_2 na 260 i 400 K, slika 3.3) vidi se da već za zapremine veće od 1 dm³, na obe temperature razlika između modela postaje vrlo mala. Jedan mol gasa u ovoj zapremini ima veliku koncentraciju. Na manjim zapreminama (još većim koncentracijama) razlike između modela značajno zavise od temperature gasa. Na nižoj temperaturi (260 K) razlika je drastična, dok je na višoj temperaturi razlika samo malo veća nego na manjim koncentracijama. Na osnovu rezultata prikazanih na ovoj slici može se zaključiti važna stvar. Obično se kaže da je idealan gas dobar model za gasove na visokim temperaturama i malim pritiscima i koncentracijama. Ali, na primer, ono što je visoka temperatura za jedan gas, kao kriterijum za model idealnog gasa, ne mora da bude dovoljno visoko za neki drugi. Drugim rečima, na istoj temperaturi i koncentraciji mo-

Slika 3.2: Izotermni procesi realnog gasa za različite temperature (levo). Površ na kojoj leže sva stanja realnog gasa, izoterme su označene crvenim, izohore plavim a izobare zelenim linijama.



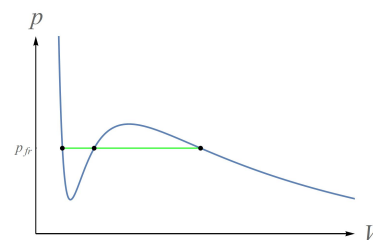
Slika 3.3: Poređenje izoterme za idealan i realan gas, za dve temperature.

del idealnog gasa ne mora da bude dobar za sve gasove. Preciznije formulisanom kriterijumu za primenu modela u gasu ćemo se vratiti u završnim napomenama o faznim prelazima.

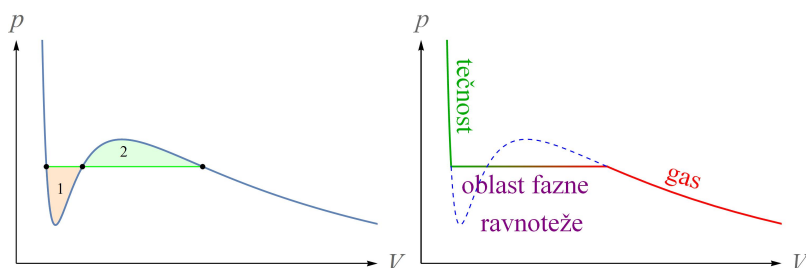
U slučaju realnog gasa sva stanja su na površi koja ima malo složeniji oblik od površi za idealan gas, slika 3.2. Na površi stanja postoji i jedna zanimljiva oblast, koja podseća na strmi kanjon.

Izdvojimo jednu izotermu koja zalazi u ovaj kanjon. Prava koja prolazi kroz tačke koje odgovaraju istom pritisku, p_{fr} , seče izotermu na tri mesta, slika 3.4. To znači da postoje tri stanja sa istim pritiskom, temperaturom i količinom supstance sa tri različite zapremine. To nije sasvim logično. Naime, postavlja se pitanje šta je kriterijum po kome se određuje u kojem tačno stanju će se naći sistem. Ovo važi za sva stanja sa pritiskom između lokalnog minimuma i maksimuma sa slike 3.4.

Maksvel je predložio sledeće rešenje: u oblasti u kojoj pritisak fluktuira može se naći sečica (zeleno linija na slici 3.5), takva da su površine ispod i iznad sečice jednake (oblasti 1 i 2 sa slike). Onda, izoterma iz ove oblasti ima strmi deo sa visokim pritiscima i malim zapreminama, horizontalni deo, i, konačno, manje strmi deo izoterme, koji odgovara nižim pritiscima i većim zapreminama. Ispostavlja se da je ovo rešenje sasvim u skladu sa eksperimentima. Levi deo izoterme odgovara tečnoj fazi supstancije, horizontalni deo je oblast fazne ravnoteže, dok desni deo odgovara gasovitoj fazi. Sad je jasna i oznaka pritiska na prvoj slici (3.4), $p = p_{fr}$. Linija je upravo Maksvelova sečica, a odgovarajući pritisak je pritisak fazne ravnoteže.



Slika 3.4: Izoterma za realan gas. Tačke koje predstavljaju neka od neobičnih stanja su spojene zelenom linijom.



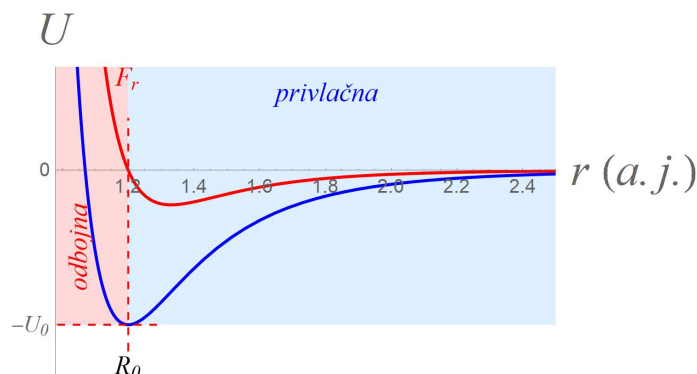
Slika 3.5: Izoterma za realan gas. Maksvelovo rešenje problema.

Mikroskopska slika

Makroskopski pristup (na primer jednačina stanja) nam može dati odgovor na pitanje kako se sistem ponaša pri promeni termodinamičkih parametara. Međutim, u okviru makroskopskih teorija ne možemo da odgovorimo na pitanje zašto se sistem ponaša na određen način.

U gasovima su molekuli skoro slobodni. U tečnostima i čvrstim telima su jače međumolekulske sile.

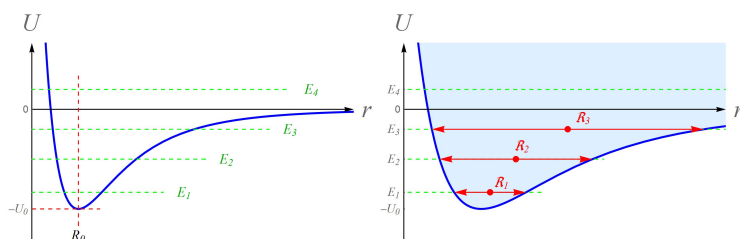
Neka je u sistemu interagujućih molekula potencijalna energija poznata (na slici 3.6 je data zavisnost potencijalne energije molekula od srednjeg rastojanja među njima, r). Ako je poznata potencijalna energija onda je poznata i radijalna komponenta sile:



$$F_r = -\frac{dU}{dr},$$

koja je prikazana crvenom linijom na istoj slici.

Molekuli se neprekidno kreću. Njihova kinetička energija zavisi od temperature (kao što će biti pokazano). Srednja energija je zbir potencijalne i kinetičke energije.



Ako pretpostavimo da potencijalna energija ne zavisi od temperature, onda se promenom temperature menja samo srednja kinetička energija molekula, a samim tim i ukupna energija.

Na slikama 3.7 je prikazano nekoliko stanja sistema molekula na različitim temperaturama. Svakom stanju odgovara jedna ukupna energija E_i (zelene isprekidane linije). Na desnoj slici su prikazane oblasti međumolekulskih rastojanja $\mathcal{R}_i$, za svako stanje, u kojima molekuli mogu da se nađu.

Sa slikom 3.7 se može zaključiti sledeće:

- Na dovoljno niskim temperaturama srednja kinetička energija može da bude značajno manja od U_0 (E_1). Molekuli osciluju u relativno maloj oblasti oko srednjeg rastojanja, $\mathcal{R}_1$. Molekuli su, u srednjem, skoro na fiksnom međusobnom rastojanju, pa je sistem tada u čvrstoj fazi.
- Povećanjem temperature povećava se oblast u kojoj molekuli mogu da se kreću ($\mathcal{R}_2$ i $\mathcal{R}_3$). Molekuli su sve manje na fiksnim rastojanjima (E_2 i E_3). Ovakva situacija je karakteristična za tečnosti ili gasove interagujućih molekula. Sa slike ne može da se vidi, ali u tečnoj fazi ne postoji dugodometno uređenje koje je postojalo u čvrstoj fazi.

Slika 3.6: Potencijalna energija sistema molekula u zavisnosti od međusobnog rastojanja molekula r . Rastojanje između molekula je dato, relativno, u odnosu na ravnotežno rastojanje R_0 , odnosno u arbitrarnim jedinicama $a.j.$ (*arbitrary units*). Osenčene oblasti predstavljaju oblast u kojoj je međumolekulska sila privlačna (plavo), odnosno, u kojoj je ona odbojna (crveno).

Slika 3.7: Na slici su prikazane različite ukupne energije (zelene isprekidane linije) za istu potencijalnu energiju. Veća ukupna energija odgovara višoj temperaturi sistema molekula. Oblast međumolekulskih rastojanja, za fiksiranu ukupnu energiju, je predstavljena crvenim strelicama. Srednja rastojanja između molekula su označena sa $\mathcal{R}_i$, dok je ravnotežno rastojanje, koje odgovara minimumu potencijalne energije, označeno sa R_0 .

- Kada je temperatura dovoljno visoka da srednja kinetička energija postane veća od U_0 (E_4) sistem je gas skoro neinteragujućih molekula, odnosno slobodnih čestica. Jedino ograničenje daju dimenzije molekula, odnosno dva molekula ne mogu da priđu proizvoljno blizu jedan drugom.
- Ako se pogledaju srednja rastojanja između molekula, odnosno srednje vrednosti međumolekulskih rastojanja u nekoj oblasti (crvene tačke na sredini intervala), vidi se da se ona povećavaju, odnosno da se sistem širi. Dakle, ovakva potencijalna energija objašnjava i termalno širenje sistema.

Molekularno kinetički model idealnog gasa

Model idealnog gasa:

- U sudu zapremine V se nalazi veliki broj (N) identičnih molekula, mase m .
- Molekuli su praktično tačkasti, odnosno dimenzije su im mnogo manje od međumolekulskih rastojanja i dimenzija suda. Samim tim, bez obzira na veliki broj molekula koncentracija je mala.
- Molekuli se neprekidno kreću, po Njutnovim zakonima, svi sudari su elastični.
- Zidovi suda su idealno čvrsti i beskonačno veće mase od mase molekula.

Tokom sudara molekuli deluju silom na zidove suda. Da bi se odredila sila kojom molekuli deluju na zidove suda potrebno je:

- odrediti impuls koji jedan molekul preda zidu prilikom sudara;
- proceniti broj sudara u jedinici vremena u neku površ površine S ;
- odrediti ukupan impuls koji zidovi suda prime od molekula usled sudara;
- odrediti silu iz ukupnog impulsa;
- odrediti pritisak gasa na zidove suda.

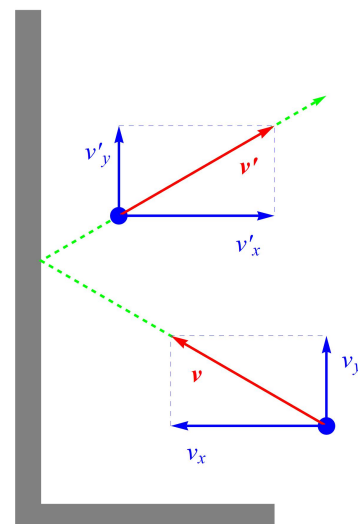
Prilikom elastičnog sudara molekula gasa sa zidom suda menja se samo komponenta brzine molekula koja je normalna na zid. Na slici je to v_x .

Promena impulsa¹ jednog molekula gasa usled sudara sa zidom suda je:

$$\Delta P = m(v' - v).$$

Onda je intenzitet promene impulsa:

$$|\Delta P| = 2mv_x.$$



Slika 3.8: Elastičan sudar jednog molekula sa zidom.

¹ Da bi se izbegla zabuna sa oznakama i da bi se intenzitet impulsa razlikovao od pritiska, u ovom odeljku impuls je označen velikim slovom P .

Neka je $dN(v_x)$ broj molekula sa komponentom brzine u intervalu $(v_x, v_x + dv_x)$. Taj broj molekula je srazmeran širini intervala brzina dv_x . Koeficijent srazmernosti je funkcija raspodele $f(v_x)$:

$$dN(v_x) = f(v_x)dv_x. \quad (3.3)$$

Osobine funkcije raspodele:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x)dv_x = N, \quad (3.4)$$

$$\langle v_x^k \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^k f(v_x)dv_x}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x)dv_x} = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^k f(v_x)dv_x, \quad (3.5)$$

gde je v_x^k k -ti stepen komponente brzine.

Broj molekula koji udare u zid u površ S za vreme dt jednak je broju molekula koji se nalazi u cilindru sa slike 3.9. Koncentracija molekula sa brzinom v_x jednaka je $\frac{1}{V}dN(v_x)$. Onda je broj molekula unutar uočenog cilindra:

$$dN = Sv_x dt \frac{1}{V} dN(v_x) = \frac{S}{V} v_x f(v_x) dv_x dt,$$

odnosno:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{S}{V} v_x f(v_x) dv_x.$$

Ukupan impuls u jedinici vremena koji molekulima sa komponentom brzine v_x predaju zidu suda je:

$$\frac{dP}{dt} = 2 \frac{S}{V} m v_x^2 f(v_x) dv_x,$$

što je jednako sili. Kada se sila podeli sa S , dobija se pritisak koji potiče od molekula čija je komponenta brzine u intervalu $(v_x, v_x + dv_x)$:

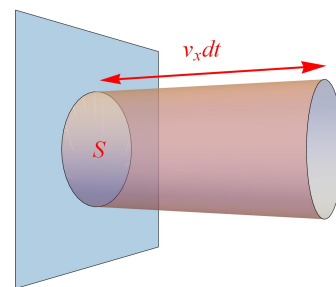
$$dp = \frac{2m}{V} v_x^2 f(v_x) dv_x.$$

Da bi se dobio ukupan pritisak, potrebno je gornji izraz prosumirati po svim vrednostima komponente brzine v_x , odnosno:

$$p = \frac{2m}{V} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 f(v_x) dv_x.$$

Izraz pod integralom je srednja vrednost kvadrata komponente brzine $\langle v_x^2 \rangle$ (jednačina 3.5) pomnožena brojem molekula u sudu. Pošto u zid udaraju samo molekulima koji se kreću prema njemu, a u prethodnom izrazu je sumirano po svim mogućim vrednostima za v_x (i pozitivnim i negativnim), ceo izraz još treba podeliti sa 2.

$$p = \frac{mN}{V} \langle v_x^2 \rangle. \quad (3.6)$$



Slika 3.9: Molekuli (sa brzinom v_x) koji se nalaze unutar cilindra, udare u površ S za vreme dt .

Za idealan gas, koji se sastoji od neinteragujućih molekula i nalazi se van spoljašnjeg polja, svi pravci kretanja molekula su podjednako verovatni. Zato je:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle.$$

Sa druge strane:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle,$$

zbog osobina integrala. Tada je:

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle.$$

Zamenom u izraz za pritisak dobija se:

$$pV = \frac{N}{3} m \langle v^2 \rangle = \frac{2N}{3} \left(\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \right).$$

S obzirom da su mase svih molekula iste, onda je:

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle.$$

Izraz sa desne strane je jednak srednjoj kinetičkoj energiji molekula.

S obzirom da se radi o idealnom gasu iz jednačine stanja idealnog gasa sledi:

$$\frac{2N}{3} \langle E_k \rangle = \nu RT,$$

što znači da je:

$$\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} \frac{\nu RT}{N} = \frac{3}{2} kT. \quad (3.7)$$

Srednja kinetička energija molekula idealnog gasa zavisi samo od temperature gasa.

S obzirom da je idealan gas u pitanju, odnosno da su molekuli tačkasti, onda je ovo srednja kinetička energija translacije. Srednja kinetička energija jednog mola idealnog gasa je:

$$N_A \langle E_k \rangle = \frac{3}{2} RT,$$

gde je N_A Avogadrov broj.

Iz izraza za kinetičku energiju dobija se srednji kvadrat brzine molekula, odnosno srednja kvadratna brzina:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m} \Rightarrow v_{sk} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (3.8)$$

Kada se rezultat za srednji kvadrat brzine vrati u izraz za pritisak, 3.6, dobija se:

$$p = nkT, \quad (3.9)$$

gde je $n = N/V$ koncentracija molekula gasa.

Iz izraza za pritisak idealnog gasa 3.9 sledi još jedna važna posledica. U idealnom gasu je potpuno zanemarena interakcija između molekula. Sa druge strane pritisak je posledica sudara molekula gasa sa zidovima suda. Neka je u sudu mešavina idealnih gasova. Interakcija molekula jednog gasa sa molekulima drugog gasa je takođe

Jedinica za količinu supstance je 1 mol, to je količina supstance koja sadrži isti broj elementarnih entiteta kao što ima atoma u 0.012kg C¹². U jednom molu supstance ima $N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ molekula (atoma). N_A je Avogadrov broj.

Čak i ako je mala koncentracija gasa u sudu, na visokoj temperaturi sudari molekula sa zidovima suda mogu da budu vrlo složeni, sve do uspostavljanja termodinamičke ravnoteže.

zanemarljiva. To znači da se svaki idealni gas u sudu ponaša kao da drugi idealni gasovi ne postoje. Sa druge strane pritisak gasa u sudu je posledica sudara svih molekula sa zidovima suda. Dakle, svaki gas daje svoj doprinos pritisku, pa se onda može uzeti da je pritisak smeše idealnih gasova jednak zbiru (parcijalnih) pritisaka pojedinačnih gasova u smeši. Ovo je poznati *Daltonov zakon*.

Brzine molekula

Ako je u sudu N molekula nekog gasa, onda je broj molekula, dN , sa brzinom u intervalu $(v, v + dv)$ jednak:

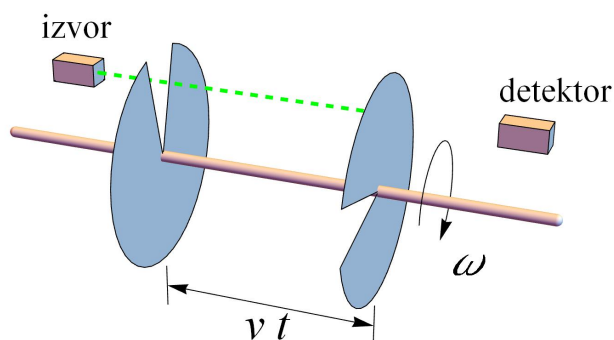
$$dN = Nf(v)dv, \quad (3.10)$$

gde je $f(v)$ funkcija raspodele po intenzitetima brzina molekula. Ova funkcija raspodele, pomnožena sa dv , ima smisao verovatnoće da molekul ima brzinu sa intenzitetom u intervalu $(v, v + dv)$.

Pošto se radi o verovatnoći, onda je suma po svim intenzitetima brzina jednaka jedinici, odnosno:

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1. \quad (3.11)$$

Funkcija raspodele $f(v)$ nije ista kao funkcija $f(v_x)$. Iako se normiranjem obe svedu na verovatnoće, prva ima smisao verovatnoće da intenzitet brzine bude u željenom intervalu, a druga da komponenta brzine bude u željenom intervalu. Zato su i granice integracije različite.



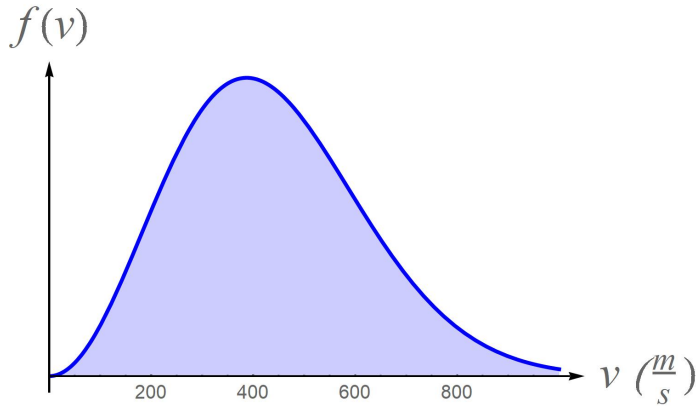
Slika 3.10: Shema eksperimenta za određivanje funkcije raspodele.

Teorijsko nalaženje funkcije raspodele prevazilazi okvire opšteg kursa, ali se mogu iskoristiti rezultati ekesperimenta. Na slici 3.10 je prikazana shema eksperimenta za određivanja broja molekula u snopu nekog gasa koji imaju brzine u određenom intervalu. Centralni deo postavke čine dva diska sa prerezima. Prorezi su jedan u odnosu na drugi zarotirani za fiksni ugao. Diskovi se nalaze na fiksiранom rastojanju jedan od drugog i čvrsto su fiksirani za osovinu koja može da rotira kontrolisanom ugaonom brzinom. Podešavanjem ugaone brzine rotacije detektor hvata molekule sa tačno određenom brzinom, i moguće je odrediti njihov broj.

Rezultati eksperimenta pokazuju da je funkcija raspodele jednaka:

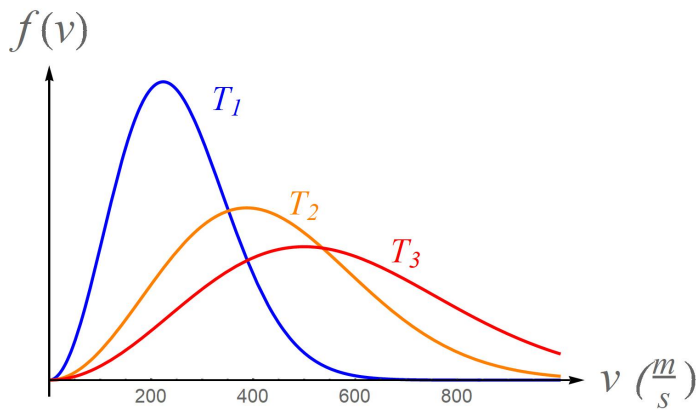
$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \quad (3.12)$$

Ova funkcija može da se dobije i iz Maksvel-Bolcmanove teorije, zato se naziva Maksvel-Bolcmanova raspodela, slika 3.11.



Slika 3.11: Maksvel-Bolcmanova raspodela.

Funkcija raspodele menja oblik sa promenom temperature. Na slici 3.12 prikazane su funkcije raspodele za tri različite temperature, $T_1 < T_2 < T_3$.



Slika 3.12: Maksvel-Bolcmanova raspodela za različite temperature.

Na nižim temperaturama funkcija ima oštiji maksimum. Kako se temperatura povećava funkcija raspodele se širi ka većim brzinama, maksimum postaje sve manje oštar i izražen.

Funkcija raspodele se koristi i za usrednjavanje različitih funkcija brzine molekula:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv, \quad (3.13)$$

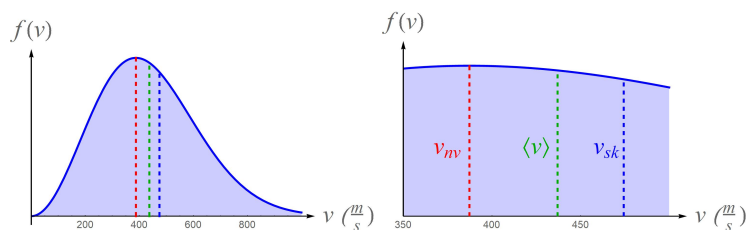
$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv, \quad (3.14)$$

$$\langle F(v) \rangle = \int_0^{\infty} F(v) f(v) dv. \quad (3.15)$$

Pored toga, značajan parametar je i najverovatnija brzina, koja se dobija iz uslova da funkcija raspodele ima maksimum, na fiksiranoj temperaturi:

$$\left. \frac{df}{dv} \right|_{T=\text{const}} = 0 \Rightarrow v_{\text{nv}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (3.16)$$

Funkcija raspodele zavisi od dve promenljive, brzine molekula v i temperature gasa T . U slučaju kada je temperatura konstantna, izvod funkcije raspodele po brzini se može označiti kao običan izvod. Strogo gledano, to je *parcijalni izvod*, što ćete učiti kasnije iz matematike.



Slika 3.13: Karakteristične brzine molekula gasa na fiksiranoj temperaturi.

Integracijom prve dve jednačine 3.13 i izračunavanjem uslova za maksimum funkcije raspodele, dobija se:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad (3.17)$$

$$v_{sk} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \quad (3.18)$$

$$v_{nv} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (3.19)$$

Brzina v_{sk} se naziva srednja kvadratna brzina, dok je v_{nv} najverovatnija brzina. Sve tri brzine iz jednačina 3.17-3.19 su prikazane na slici 3.13.

Funkcija raspodele (formula 3.12) je takvog oblika da nikada nije tačno jednaka nuli. Ipak, ona ima zanemarljivo male vrednosti za vrlo velike brzine, tako da se uvek može analizirati u konačnom intervalu brzina.

Iako funkcija raspodele zavisi od mase molekula, ipak se mogu uočiti neke opšte stvari. Na primer, deo ukupnog broja molekula čija je brzina manja od srednje kvadratne je uvek 61%, nezavisno od vrste gasa. Takođe 99% molekula ima brzinu manju od dvostruke srednje kvadratne brzine.

Poznavanje funkcije raspodele može da nam da mnogo potrebnih informacija o sistemu koji nas zanima. Na primer, šta se događa pri isparavanju tečnosti ili šta je brzina hemijske reakcije. Iako se ne radi o idealnim gasovima, neka funkcija raspodele se može naći, i analiza ne zavisi suštinski od oblika funkcije.

Pri isparavanju molekuli sa najvećom kinetičkom energijom, odnosno brzinom, napuštaju tečnost. Samim tim se srednja kinetička energija molekula u sistemu smanji, a to znači da se sistem ohladio.

Za mnoge hemijske reakcije među molekulima potrebna je neka minimalna, aktivaciona energija. Često je ta energija mnogo veća od kinetičke energije bilo kog pojedinačnog molekula. Međutim, sa povećanjem temperature, povećava se broj molekula sa većim kinetičkim energijama i na određenoj temperaturi bude dovoljno molekula koji mogu da preskoče energijski prag za reakciju i hemijska reakcija počinje da se odvija. Kada se preskoči prag za neku reakciju dalje zagrevanje dovodi do brže reakcije.

Mnogi procesi u prirodi se odvijaju na ovakav način. Kada se prosečna temperatura vazduha, na primer, poveća u proleće biljke počinju da listaju i kasnije cvetaju.

Primer 3.1**Dodatak: Integrali**

Integrali koji se dobijaju pri računanju srednjih vrednosti brzina mogu da se izračunaju na nekoliko načina. To su integrali Gausovog tipa, i rešenje se može pronaći u tablicama integrala. Ovde će biti pokazano kako za izračunavanje može da se iskoriti gama funkcija. Gama funkcija je definisana tzv. nesvojstvenim integralom:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (3.20)$$

Gama funkcija ima mnogo zanimljivih osobina, ali ovde će biti pomenute samo one koje će biti iskorišćene za izračunavanje srednjih vrednosti brzina. Može se pokazati da je:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad (3.21)$$

što se u slučaju kada je a prirodan broj svodi na:

$$\Gamma(a+1) = a!, \quad a \in \mathbb{N}.$$

Sa druge strane je:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (3.22)$$

Na osnovu ove dve osobine može da se izračuna vrednost gama funkcije za bilo koji prirodan ili polucelobrojan pozitivan broj. Može takođe da se pokaže da je:

$$\Gamma(a) = 2 \int_0^{\infty} x^{2a-1} e^{-x^2} dx. \quad (3.23)$$

Srednja vrednost brzine molekula je po definiciji:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

Ako se uvede smena $u = v\sqrt{\frac{m}{2kT}}$, dobija se:

$$\langle v \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 \int_0^{\infty} u^3 e^{-u^2} du.$$

Integral je, po formulama 3.23 i 3.21, jednak

$$\frac{1}{2}\Gamma(2) = \frac{1}{2}.$$

Onda je, posle sređivanja:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Srednji kvadrat brzine je:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

Uz istu smenu, dobija se:

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{\frac{5}{2}} \int_0^{\infty} u^4 e^{-u^2} du.$$

Integral je jednak:

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}.$$

Posle sređivanja dobija se:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m},$$

pa je srednja kvadratna brzina zaista jednaka:

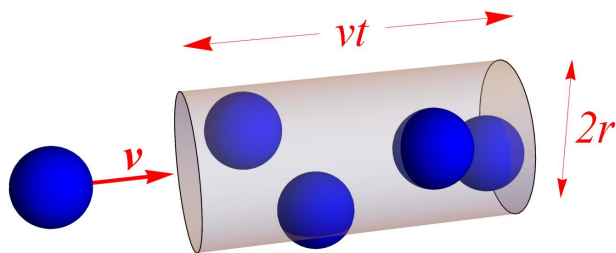
$$v_k = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

kao što je već navedeno u izrazu 3.19.

Sudari između molekula

Prva popravka modela idealnog gasa je da se uzmu konačne dimenzije molekula. Ako su molekuli materijalne tačke onda praktično nema sudara među molekulima.

Neka su molekuli krute sfere poluprečnika r . Neka je u zapremini V , N molekula. Ma koliko nerealno bilo pretpostavićemo da se kreće samo jedan molekul, a da svi ostali miruju.



Slika 3.14: Potencijalne mete za molekul koji se kreće.

Da bi došlo do sudara rastojanje između centara molekula može najviše da bude $2r$.

Molekul koji se kreće će se sigurno sudariti sa bilo kojim drugim molekulom čiji je centar u cilindru poluprečnika $2r$. Zapremina tog cilindra je $dV = 4\pi r^2 v dt$.

Pošto je koncentracija molekula u sudu $\frac{N}{V}$, onda je broj molekula u cilindru $dN = \frac{4\pi N r^2 v}{V} dt$. To je upravo jednako broju mogućih sudara molekula za vreme dt , odnosno:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{4\pi N r^2 v}{V}.$$

Kao što ćete moći da pokažete na trećoj godini, iako izgleda neobično, u slučaju kada se svi molekuli kreću, rezultat se razlikuje samo za faktor $\sqrt{2}$:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{4\pi\sqrt{2}Nr^2v}{V}. \quad (3.24)$$

Dobijena veza važi i za usrednjene veličine:

$$\left\langle \frac{dN}{dt} \right\rangle = \frac{4\pi\sqrt{2}Nr^2\langle v \rangle}{V}. \quad (3.25)$$

Srednje vreme između dva sudara je recipročna vrednost broja sudara u jedinici vremena:

$$\langle t \rangle = \frac{V}{4\pi\sqrt{2}Nr^2\langle v \rangle}. \quad (3.26)$$

Srednji put, ili *srednji slobodni put*, je put koji molekul pređe, u srednjem, između dva sudara. Dobija se kao proizvod srednje brzine i srednjeg vremena između dva sudara, $\langle v \rangle \langle t \rangle$:

$$\lambda = \frac{V}{4\pi\sqrt{2}Nr^2} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}nr^2}, \quad (3.27)$$

gde je n koncentracija molekula. Rezultat ne zavisi od brzine molekula!

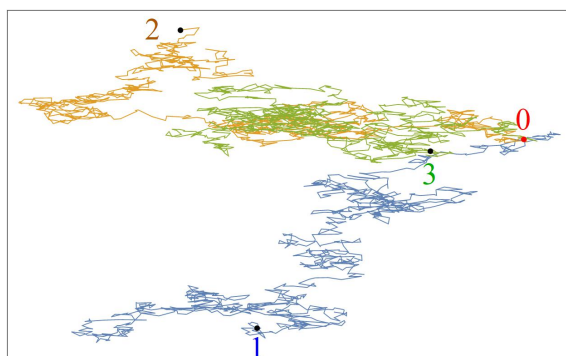
Za idealan gas koncentracija se može izraziti preko temperature i pritiska, pa je izraz za srednji slobodni put:

$$\lambda = \frac{kT}{4\pi\sqrt{2}pr^2}.$$

Primer 3.2

Braunovo kretanje

Škotski botaničar Robert Braun zapazio je dok je posmatrao čestice polena u vodenoj suspenziji pod mikroskopom, da se čestice nasumično kreću kroz suspenziju, primetno se trzajući duž potpuno nasumičnog pravca (1827. godine). Braun nije samo konstatovao pojavu, nego je počeo da je proučava. Zaključio je da nije u pitanju bilo kakav mehanizam kretanja „živog” polena, već da se ista stvar dešava i sa neorganskim česticama. Kasnije se kretanje koje se odvija kao kretanje čestica polena nazvalo *Braunovo kretanje*, a takođe je otkriveno da je trzanje čestica intenzivnije ako je temperatura sredine (suspenzije) viša. Ovo



Slika 3.15: Simulacije Braunovog kretanja. Prikazane su tri simulacije, sve počinju iz iste tačke (o). Putanje su označene različitim bojama, plava završava u tački 1, smeđa u tački 2 i zelena u tački 3.

otkriće je ukazalo da je uzrok u termalnom, neprekidnom, kretanju molekula, koje je konačno opisano kinetičkom teorijom krajem 19. veka (Maksvel, Bolcman, Klauzijus). Srednja kinetička energija molekula je proporcionalna temperaturi, pa je onda logično da sudari molekula koji imaju veću kinetičku energiju sa većim česticama izaziva njihovo intenzivnije podrhtavanje. Ova ideja leži u osnovi Ajnšajnovog rada o Braunovom kretanju (1905.), u kome je konačno objašnjena priroda Braunovog kretanja i praktično dokazano postojanje molekula, čije je postojanje do tada bila samo radna hipoteza za molekularno-kinetičku teoriju.

Molekuli sredine u kojoj se nalazi čestica koju možemo da vidimo se neprekidno kreću. U srednjem svi pravci kretanja su podjednako verovatni. Međutim, u nekom kratkom vremenskom intervalu, u proizvoljnom delu sistema moguće je da molekuli malo više udare česticu sa jedne strane nego sa druge. To izaziva trzanje čestice koje možemo da opazimo pod mikroskopom. Na slici vidimo tri simulacije, pri potpuno istim uslovima. Jednom je čestica otišla na jednu stranu, u trećoj simulaciji na suprotnu, a u srednjoj simulaciji se gotovo vratila na mesto odakle je krenula.

Danas se kretanje braunovskog tipa koristi, na primer, za opisivanje difuzije (kretanje velike čestice kroz vazduh, šupljine u poluprovodniku, kretanje kalcijuma kroz koštano tkivo...).

Bolcmanova raspodela

Ako je termodinamički sistem mehanički izolovan i ako je u stanju termodinamičke ravnoteže i ne nalazi se u nekom polju, onda je srednja koncentracija gasa u celom sistemu ista. Ali, ako se sistem nađe u spoljašnjem polju, to može da se odrazi na koncentraciju molekula.

Neka se gas nalazi u homogenom gravitacionom polju i neka u termodinamičkoj ravnoteži, tako da je onda temperatura gasa svuda ista. Ako ne bi bila ista svuda, došlo bi do kretanja delova gasa kojim bi se temperatura izjednačila u celom sistemu, i gas ne bi bio u termodinamičkoj ravnoteži. Ako gas miruje onda je i u stanju mehaničke ravnoteže.

Uočimo proizvoljan, tanak, delić gasa, visine dz . Pošto je ceo gas u mehaničkoj ravnoteži onda i svaki proizvoljno odabran delić mora takođe da bude u mehaničkoj ravnoteži. Tada je razlika sila pritisaka sa gornje i donje strane delića jednaka težini delića. Težina delića, gdm_d , je jednaka zbiru težina svih molekula $gdm_d = mgdN$, gde je m masa jednog molekula, a dN broj molekula u deliću. Broj molekula je $dN = n(z)dV$, gde je $n(z)$ koncentracija molekula na visini na kojoj se delić nalazi. Onda je težina delića jednaka:

$$gdm_d = nmgdV = nmgSdz.$$

Uslov mehaničke ravnoteže je:

$$p(z + dz)S + nmgSdz - p(z)S = 0.$$

Pošto je $p(z + dz) - p(z) = dp$, onda ovaj uslov može da se napiše kao:

$$\frac{dp}{dz} = -nmg.$$

S obzirom da je $p = nkT$ (jednačina 3.9), onda je:

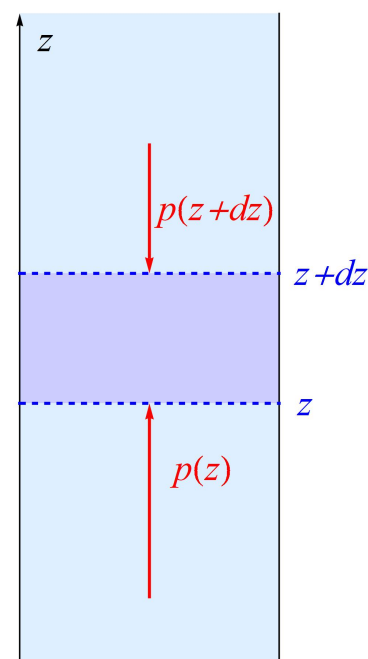
$$\frac{dn}{dz} = -\frac{nmg}{kT},$$

odnosno:

$$\frac{dn}{n} = -\frac{mg}{kT}dz.$$

U slučaju homogenog polja, $g = \text{const}$, ova jednačina se lako integri-
li:

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}, \quad (3.28)$$



Slika 3.16: Delić stuba gasa u gravitacionom polju.

gde je n_0 koncentracija za $z = 0$.

Međutim, jednostavnom analizom se može zaključiti da situacija u nehomogenom polju neće biti mnogo složenija. Iz mehanike je poznato da je $mgdz = d\mathcal{E}_p$, priraštaj potencijalne energije molekula. Onda je:

$$\frac{dn}{n} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{kT}.$$

Integracija ove jednačine ne zavisi od toga da li je polje homogeno ili nije, te se tako dobija tzv. Bolcmanova rasodela:

$$n = n_0 e^{-\frac{\mathcal{E}_p}{kT}}. \quad (3.29)$$

Ovde je n_0 koncentracija molekula na mestima na kojima je potencijalna energija jednaka nuli, $\mathcal{E}_p = 0$. Konačno, dobijeni izraz za Bolcmanovu raspodelu važi za bilo kakvu konzervativnu silu, bez razlike da li je polje homogeno ili nije.

Množenjem jednačine 3.28 sa kT , dobija se izraz za pritisak gasa u homogenom gravitacionom polju, *barometarska formula*:

$$p = p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}. \quad (3.30)$$

Često je podesnije koristiti drugi oblik barometarske formule. Ako se i brojilac i imenilac u eksponentu pomnože Avogadrovim brojem, dobija se:

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}, \quad (3.31)$$

gde je M molarna masa gasa.

Pri izvođenju Bolcmanove raspodele i barometarske formule uzeto je da je vazduh neprekidna sredina. Zanemareno je kretanje molekula vazduha. Ova aproksimacija je dovoljno dobra čak i za prilično velike gustine gasa i veliki broj sudara među molekulima. Dovoljno je samo da srednji slobodni put molekula bude mali u poređenju sa debljinom sloja dz . Samo u tom slučaju ima smisla govoriti o pritisku okolnog gasa na uočeni delić.

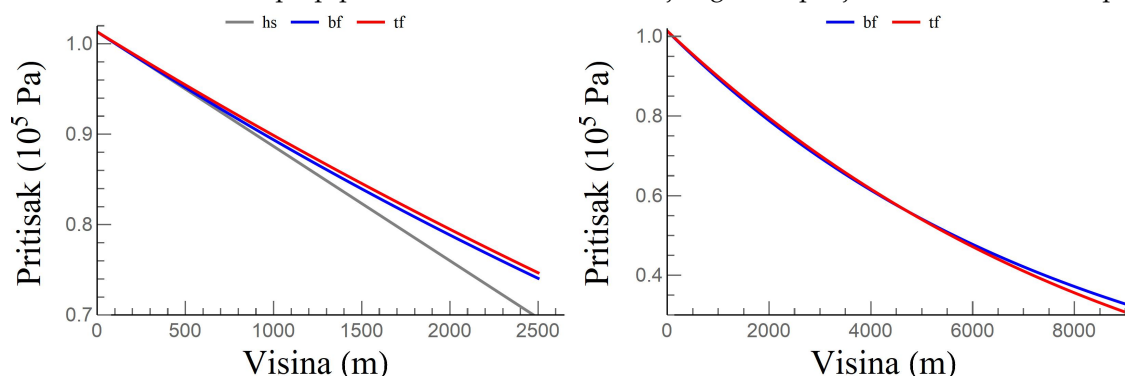
Primer 3.3

Vazdušni pritisak

p	aprosk.		oznaka
$p_0 - \rho gh$	M	=	hs
	$const,$		
	$g = const,$		
	$T = const,$		
	$\rho = const$		
$p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$	M	=	bf
	$const,$		
	$g = const,$		
	$T = const$		
$p_0 (1 - ah)^{\frac{Mg}{aRT_0}}$	M	=	tf
	$const,$		
	$g = const$		

Dobar model za određivanje vazdušnog pritiska u zavisnosti od nadmorske visine nije lako napraviti. Zemljina atmosfera je vrlo složen sistem, i lokalno neki deo atmosfere ne mora da bude u termodinamičkoj ravnoteži. Temperatura, koncentracija pa i sastav vazduha se menja sa visinom. Pored toga vazdušne mase se kreću težeći da izjednače pritiske. U takvoj situaciji potrebno je napraviti niz aproksimacija. Pre svega uzećemo da je vazduh idealan gas, što i nije gruba aproksimacija s obzirom na gustinu vazduha i opseg temperatura u Zemljinoj atmosferi. Drugo, uzećemo da nema makroskopskog kretanja vazduha.

Pretpostavićemo, dalje, da je gravitaciono polje Zemlje homogeno, odnosno da je gravitaciono ubrzanje, g , konstantno. Aproksimacija je gruba, ali ako se podsetite koliko se vrednost gravitacionog ubrzanja menja sa visinom, može se pretpostaviti da ne utiče mnogo na rezultat. Pored toga pretpostavićemo i da se sastav vazduha ne menja sa visinom, odnosno da je $M = const$. Ako smo pretpostavili da je vazduh idealan gas, onda za njega, kao smešu idealnih gasova važi i Daltonov zakon da je ukupan pritisak jednak zbiru parcijalnih pritisaka u smeši. Za svaki gas u vazduhu važi Bolcmanova raspodela, a to onda znači da gasovi sa različitim molarnim masama nemaju istu raspodelu. Koncentracija lakih molekula sporije opada sa visinom nego koncentracija težih, samim tim molarna masa vazduha ne može da bude konstantna. Ipak ova kontradiktorna pretpostavka ne dovodi do uočljivog odstupanja, bar ne u oblasti troposfere.



Uporedićemo tri modela. U prvom, hidrostatičkom, ćemo pretpostaviti da je gustina atmosfere svuda ista, $\rho = const$, kao i da se temperatura vazduha ne menja sa visinom, $T = const$. U drugom slučaju ćemo uzeti da gustina (koncentracija) vazduha nije svuda ista i dobićemo barometarsku formulu. U trećem slučaju ćemo iskoristiti empirijsku formulu za promenu temperature vazduha sa visinom, $T = T_0(1 - ah)$, gde je T_0 temperatura na nivou mora, dok je a empirijska konstanta. Za poređenje rezultata uzeto je da je $a = 2.25577 \times 10^{-5} \frac{1}{m}$. Dobijeni izrazi za pritisak su dati u tabeli. I pored velike razlike u aproksimacijama koje se ogledaju i u potpuno različitim funkcijama visine, ipak na dovoljno malim visinama rezultati dobijeni na tri načina se ne razlikuju značajno. Čak i vrlo grubi hidrostatički model daje sasvim prihvatljive rezultate za visine do 2000 m (prva slika). Na visinama do 9000 m, barometarska formula se vrlo dobro slaže sa empirijskom (druga slika). Važan zaključak koji može da se izvuče iz ovog primera vezan je za izbor aproksimacije. Često je i vrlo gruba aproksimacija dovoljno dobra za kvalitativan opis pojave (hidrostatički model na malim visinama). Gruba aproksimacija je dobar početni korak u pravljenju boljeg modela.

*Toplotni kapacitet**Gas*

Određena količina idealnog gasa se nalazi u sudu fiksirane zapremine. Srednja kinetička energija gasa je:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \mathcal{E} = \frac{3}{2} \nu RT.$$

Dovođenjem toplote gasu, menja se kinetička energija molekula $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} + d\mathcal{E}$, gde je:

$$d\mathcal{E} = \frac{3}{2} \nu R dT.$$

Molarni toplotni kapacitet je po definiciji:

$$C = \frac{1}{\nu} \frac{dQ}{dT},$$

u slučaju kada je zapremina konstantna:

$$C = C_V = \frac{1}{\nu} \frac{dQ}{dT},$$

odnosno:

$$dQ = \nu C_V dT.$$

Kada je zapremina idealnog gasa konstantna sva dovedena toplota dQ ide na promenu kinetičke energije, $d\mathcal{E}$, odnosno $dQ = d\mathcal{E}$. Tada je:

$$C_V = \frac{3}{2} R. \quad (3.32)$$

Molarni toplotni kapacitet idealnog gasa ne zavisi od vrste gasa ($C_V = 12.47 \frac{J}{molK}$).

Eksperimenti pokazuju da je rezultat, 3.32, uvek dobar za jednoatomske gasove. Gas složenijih molekula pokazuje značajno odstupanje od ovog rezultata naročito na višim temperaturama.

Jednoatomske molekule su tačkasti i mogu samo translatorno da se kreću. Složeniji molekuli mogu i da rotiraju i vibriraju. Zbog toga deo dovedene energije može da ode na povećanje kinetičke energije rotacije i vibracije.

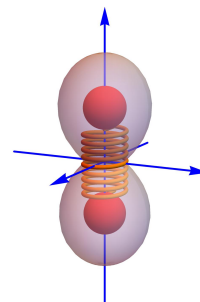
Pokazuje se da važi teorema o ravnomernoj raspodeli energije po stepenima slobode molekula (TRRESS). Svaki stepen slobode troši $\frac{1}{2} kT$ energije.

Broj stepeni slobode je broj nezavisnih koordinata potrebnih za zadavanje položaja svih atoma u molekulu. Za svaki atom nam je potrebno da znamo 3 koordinate. Ako molekul ima N atoma, za sve njih je potrebno $3N$ koordinata.

Translacije molekula kao celine se mogu zadati sa tri koordinate, tako da svaki molekul ima 3 translaciona stepena slobode. Svaka rotacija se može predstaviti kao kombinacija tri rotacije oko tri međusobno ortogonalne ose. Zbog toga molekuli, u principu, imaju 3 rotaciona stepena slobode. Ostali stepeni slobode su vibracioni. Atomi (jednoatomske molekule) su tačkasti, tako da njihova rotacija ne zahteva nikakvu energiju, pa samim tim nemaju rotacione stepene

slobode. Višeatomski molekuli mogu da budu linearni i nelinearni. Linearni molekuli se sastoje od atoma koji su raspoređeni duž iste prave. Rotacija oko ose koja se poklapa sa pravcem na kojem su atomi ne zahteva nikakvu energiju. Tako da linearni molekuli imaju za jedan manji broj rotacionih stepeni slobode, odnosno 2.

Na slici 3.17 shematski je prikazan dvoatomski molekul. Atomi su dati kao kuglice u elektronskom oblaku molekula. Interakcija između atoma je prikazana kao opruga. Rotacija oko ose koja je osa simetrije molekula, na slici vertikalna osa, ne zahteva nikakvu energiju, jer je skoro sva masa molekula skoncentrisana u tačkama na osi. Međutim, rotacije oko osa koje su ortogonalne na osu molekula zahtevaju energiju, i postoje dve takve ose. Takođe, slika može da pomogne da se vidi da ima samo jedan vibracioni stepen slobode, a to odgovara oscilovanju opruge, odnosno kretanju atoma u molekulu jedan ka drugom, ili jedan od drugog.



Slika 3.17: Shematski prikaz dvoatomskog molekula.

N (broj atoma)	ukupno	tr.	rot.	vib.
1	3	3	–	–
2	6	3	2	1
3 (linearni)	9	3	2	4
3	9	3	3	3
N (linearni)	$3N$	3	2	$3N-5$
N	$3N$	3	3	$3N-6$

Tabela 3.1: Broj stepeni slobode N atomskih molekula.

Na svaki stepen slobode ide po $\frac{1}{2}kT$ energije osim za vibracione stepene slobode. Svaki vibracioni stepen slobode zahteva dvostruko više energije. Ako zamislimo vibraciju molekula kao harmonijsko oscilovanje, onda dovedena energija podjednako ide na povećanje kinetičke i potencijalne energije oscilovanja. Zato vibracioni stepeni slobode troše dvostruko više energije.

Molarni toplotni kapacitet pri konstantnoj zapremini, uzimajući u obzir broj stepeni slobode, i , je:

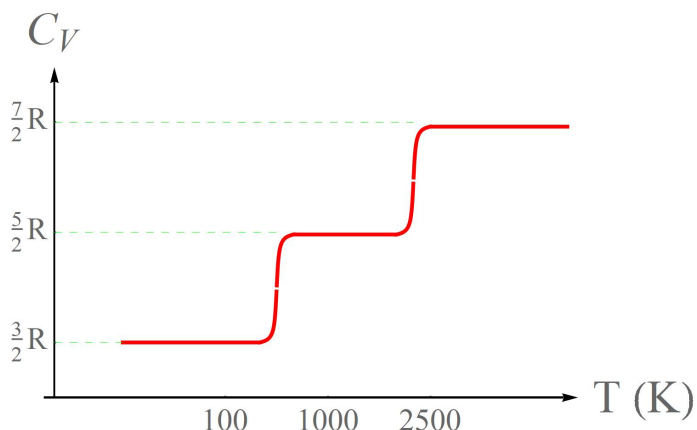
$$C_V = \frac{i}{2}R. \quad (3.33)$$

Uvođenjem broja stepeni slobode je popravljen model idealnog gasa, odnosno samo je uzeta u obzir struktura molekula, kao i interakcija atoma unutar molekula (vibracije). Molekuli i dalje ne interaguju međusobno u idealnom gasu.

I pored popravke, eksperiment ne pokazuje da je C_V konstantno. Tipičan rezultat je prikazan na slici 3.18.

Na ovoj slici se vidi da C_V zavisi od temperature, odnosno ima platoe u širokom opsegu temperatura, zatim manje ili više nagle skokove, do sledećeg platoa. Ispostavlja se da za pobuđivanje rotacionih i vibracionih stepeni slobode postoji energijski prag koji treba preći. Takođe, u oblastima porasta toplotnog kapaciteta kriva nije glatka nego stepenasta, energije vibracija su kvantovane.

Na niskim temperaturama samo translacioni stepeni slobode su pobuđeni. Počev od neke temperature počinju da se aktiviraju rotacioni stepeni slobode. Kada se svi pobude ponovo se dobija plato



Slika 3.18: Molarni toplotni kapacitet gasa vodonika u zavisnosti od temperature.

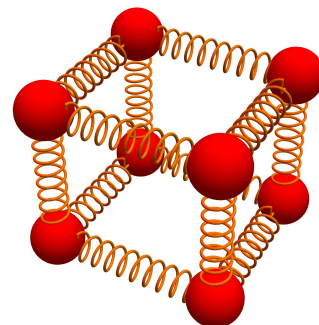
za dalje povećane temperature. Zatim, na još višim temperaturama počinju da se pobuđuju vibracioni stepeni slobode.

Čvrsto telo

Razmotrimo monoatomske kristal. Atomi su regularno raspoređeni u čvorovima rešetke. Ako se primeni TRESS kristal ima 3 translaciona stepena slobode.

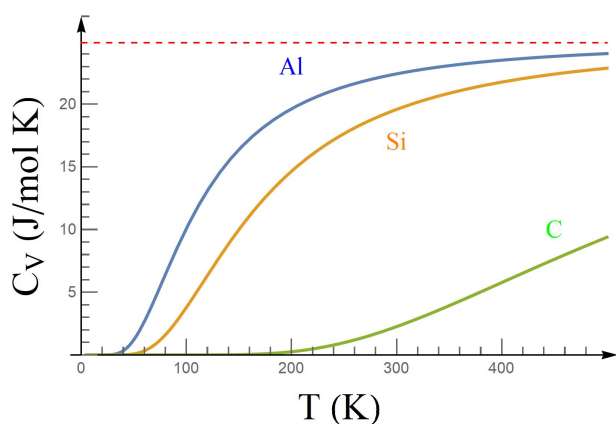
Da bi atomi formirali kristalnu rešetku ne može se zanemariti interakcija između atoma. Kretanje atoma u kristalu se može dobro opisati kao harmonijsko oscilovanje. Kao i svaki oscilator, atomi imaju kinetičku i potencijalnu energiju oscilovanja.

U mehanici ste videli da je srednja kinetička energija linearnog harmonijskog oscilatora jednaka srednjoj potencijalnoj energiji. U slučaju atoma u kristalu radi se o trodimenzionalnim spregnutim oscilatorima, ali možemo da pretpostavimo da važi ista stvar, $\langle \mathcal{E} \rangle = \langle U \rangle$.



Slika 3.19: Elementarna ćelija jednoatomske kristala, kao sistem spregnutih oscilatora.

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle U \rangle = \frac{3}{2} kT.$$



Slika 3.20: Toplotni kapaciteti nekoliko kristala. C se odnosi na dijamant.

Onda je ukupna mehanička energija zbir kinetičke i potencijalne energije:

$$\langle E \rangle = 3\nu RT.$$

Tada je molarni toplotni kapacitet pri konstantnoj zapremini:

$$C_V = 3R = 24.9 \frac{J}{molK}.$$

Kao i u slučaju gasova tako i kod kristala, dobijeni rezultat odgovara najvećoj vrednosti toplotnog kapaciteta. Na niskim temperaturama nisu svi stepeni slobode aktivni. S obzirom da ima mnogo stepeni slobode, eksperimentalna kriva je glatka i na visokim temperaturama teži maksimalnoj vrednosti.

Zadaci

Jednačina stanja

- 3.1 U motoru sa unutrašnjim sagorevanjem se smeša vazduha i goriva sabije 9 puta pre paljenja. Ako je pre sabijanja temperatura smeše $t = 27^\circ\text{C}$, a pritisak jednak normalnom atmosferskom, a posle sabijanja pritisak je $p = 21.7 \text{ atm}$ kolika je temperatura smeše posle sabijanja?
- 3.2 Puna ronilačka boca zapremine $V = 10 \text{ l}$, sadrži vazduh na pritisku $p = 2 \times 10^7 \text{ Pa}$, i temperatura vazduha je $t = 42^\circ\text{C}$. Pritisak vazduha u „praznoj“ boci je 10^5 Pa i temperatura mu je $t = 21^\circ\text{C}$. Ako je molarna masa vazduha $M = 29 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, kolika je masa vazduha u punoj boci?
- 3.3 Naći kako pritisak vazduha zavisi od visine u Zemljinoj atmosferi, ako se uzme da temperatura, gravitaciona konstanta i molarna masa vazduha ne zavise od visine? Koristeći dobijeni rezultat izračunati koliki pritisak na vrhu Mont Everesta.
- 3.4 U zatvorenom sudu je neki gas. Kako biste utvrdili koji model je dobar za opisivanje ovog gasa, Van der Valsov model ili model idealnog gasa?

Mikroskopska slika

- 3.5 Zamislite da imate fantastičnu mašinu kojom možete proizvoljno da menjate interakciju između molekula u nekom sistemu. Imate sistem u čvrstoj fazi. Kako će se promeniti gustina materijala ako dvostruko uvećate vrednost parametra R_0 sa slike 3.6?
- 3.6 Kakvu promenu u osobinama materijala očekujete ako se parametar U_0 poveća dva puta? (Dubina jame će biti $-2U_0$.) (Poželjno je što detaljnije obrazloženje, diskusija.)
- 3.7 Masa velikog organskog molekula je $1.41 \times 10^{-21} \text{ kg}$. Kolika je molarna masa ove supstance?

3.8 Savremene vakuumske pumpe mogu vrlo lako da ostvare pritisak reda veličine 10^{-13} atmosfere u laboratoriji. U nekom sudu na sobnoj temperaturi $T = 300 \text{ K}$ pritisak je $9 \times 10^{-14} \text{ atm}$. Kolika je koncentracija molekula u ovom sudu (broj molekula u jedinici zapremine)?

3.9 Maglina „Laguna“ je oblak vodonika koji je udaljen oko 3900 svetlosnih godina od Zemlje. Oblak je u prečniku oko 45 svetlosnih godina i svetli zato što mu je temperatura 7500 K . Oblak je vrlo redak ima oko 80 molekula u kubnom centimetru. Izračunajte pritisak gasa u maglini. Uporedite rezultat sa pritiskom koji stvara vakuum pumpa iz prethodnog zadatka. U nekim naučno-fantastičnim filmovima brod koji uleti u maglinu počinje da se trese kao automobil na lošem putu. Koju ocenu iz fizike biste dali scenaristima ovih filmova? Zašto?

3.10 U nekom sudu je idealan gas pri normalnim uslovima ($T = 300 \text{ K}$, $p = 10^5 \text{ Pa}$). Zamislite da su, u srednjem, molekuli na takvim rastojanjima da se nalaze u temenima kocke. Kolika je stranica ove kocke? Uporedite ovu dužinu sa dimenzijama molekula (kiseonika na primer). Uporedite ovu dužinu sa međuatomskim rastojanjima u kristalima, koje je, na primer 0.3 nm .

Molekularno kinetička teorija

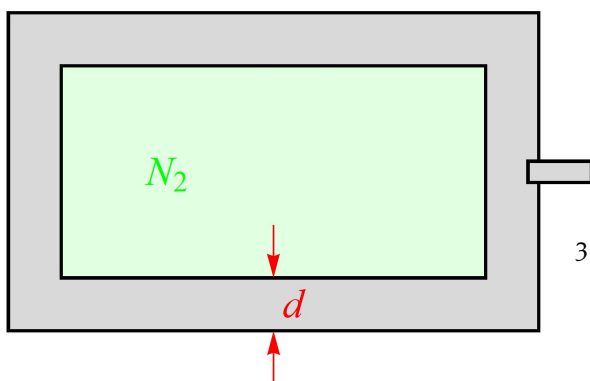
- 3.11 Kiseonik se nalazi u nekom sudu na temperaturi $t = 27^\circ\text{C}$. Izračunati:
 - Srednju kinetičku energiju molekula kiseonika.
 - Srednju kinetičku energiju jednog mola kiseonika.

- Srednju kvadratnu brzinu molekula kiseonika.
- 3.12 Pet molekula ima brzine $500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $600 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $700 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $800 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i $900 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Izračunati srednju i srednju kvadratnu brzinu ovih molekula.
- 3.13 Videli ste da je srednja kinetička energija srazmerna temperaturi. U nekom sudu imamo gas na temperaturi T . Da li će se gas zagrejati ako sud počne da se kreće? Obrazložiti odgovor.
- 3.14 U dva identična suda, A i B, se nalaze idealni gasovi. Temperatura u sudu A je 50°C , a u sudu B 10°C . To je sve što se zna o gasovima u ova dva suda. Koji od sledećih iskaza je sigurno tačan? Koji bi trebalo da bude tačan? (a) Pritisak u sudu A je veći od pritiska u sudu B. (b) U sudu A ima više molekula. (c) U A i B ne može biti isti gas. (d) Molekuli u A imaju veću srednju kinetičku energiju od onih u B. (e) Molekuli u A se kreću brže od onih u B. Obrazložite odgovore.
- 3.15 (a) Deuteron je jezgro deuterijuma, i sastoji se od protona i neutrona. Plazma deuteronu u fuzionom reaktoru može da bude zagrejana do 300 miliona kelvina. Kolika je srednja kvadratna brzina deuteronu na ovoj temperaturi? Kolika je ona u poređenju sa brzinom svetlosti? (b) Kada bi srednja kvadratna brzina deuteronu bila $0.1 c$, kolika bi bila temperatura plazme?
- 3.16 Molarna masa molekula kiseonika (O_2) je 32 g/mol . (a) Kolika je srednja kinetička energija molekula kiseonika na temperaturi 300 K . (b) Koliki je srednji kvadrat brzine i srednja kvadratna brzina na ovoj temperaturi? (c) Koliki je impuls molekula kiseonika koji se kreće ovom brzinom? (d) Neka se molekul kiseonika kreće ovom brzinom duž pravca koji je normalan na zid suda, i kreće se od jednog do drugog zida duž iste linije. Ako je rastojanje između naspramnih zidova 0.1m , kolika je srednja sila kojom molekul deluje na jedan od zidova? (e) Kolika je sila po jedinici površine (ako je sud kocka)? (f) Koliko molekula koji se kreću ovom brzinom je potrebno da stvore pritisak od jedne atmosfere? (g) Koliko molekula ima u sudu na temperaturi od 300 K i pritisku od jedne atmosfere? (h) Koliko puta je broj molekula u sudu veći od broja koji ste dobili u delu (f)? Pokušajte da objasnite ovakav odnos!
- 3.17 Neka je rastojanje između diskova L , ugao između prereza θ . Nađite vezu između brzine molekula i ugaone brzine rotacije u eksperimentu za određivanje brzine molekula (slika 3.10).
- 3.18 Ako ste vešti sa nekim programom u kome možete da radite numeričku integraciju, pokušajte da pokažete da 61% molekula ima brzine manje od srednje kvadratne, a 99% brzinu manju od dvostruke srednje kvadratne brzine.
- 3.19 Na osnovu Maksvelove raspodele po brzinama napravite raspodelu po kinetičkim energijama.
- 3.20 Kako biste od krive koja predstavlja raspodelu po brzinama ili energijama dobili krivu za sistem koji su napustili molekuli sa brzinama (energijama) koje su veće od neke zadate? Samo skicirajte proceduru, odnosno dajte osnovne korake. Pretpostavite da je posle odlaska nekih molekula iz sistema, sistem došao u novo stanje termodinamičke ravnoteže. Kako će se temperatura sistema promeniti? (Procena!) Međusobna diskusija je poželjna!
- 3.21 Neka u sistemu ima N molekula. Koliko ima molekula sa brzinom v , $f(v)$ ili $Nf(v)$, ili nešto treće?
- 3.22 Zamislite da imamo specijalnu foliju-filter koju možemo da zalepimo na prozor. Filter ima takve otvore da dopušta samo molekulima kojima je brzina veća od neke određene vrednosti da napuste prostoriju. Istovremeno, u prostoriju mogu da uđu samo molekuli kojima je brzina manja od iste te granične brzine. Šta će se desiti sa temperaturom vazduha u prostoriji? (Vrat ćemo se na ovaj zadatak još jednom tokom kursa.)
- 3.23 Koristeći ideje molekularno kinetičke teorije objasnite zašto se u gasu kome se smanji zapremina poveća pritisak, ako temperatura ostane ista?
- 3.24 Dva suda jednakih dimenzija imaju identične rupice kroz koje može da curi gas. Ako su gasovi na istoj temperaturi šta će brže da iscure iz suda kiseonik ili vodonik? Zašto?
- 3.25 Gas se zagreje od 30°C do 60°C . Da li mu se srednja kinetička energija poveća dva puta?
- 3.26 Poređajte molekule od onog sa najvećom srednjom kvadratnom brzinom do onog sa najmanjom, kao i molekule od onog sa najvećom srednjom kinetičkom energijom do onog sa najmanjom za kiseonik na 300 K , azot na 300 K , kiseonik na 330 K i azot na 330 K .

- 3.27 Izračunati srednju kvadratnu brzinu molekula vodonika u Sunčevoj koroni. Potrebne podatke pronaći na internetu.

Sudari molekula

- 3.28 Izračunati srednji slobodni put za molekule vazduha na temperaturi 27°C , ako je $r \approx 2\text{\AA}$, a pritisak 1 atm.
- 3.29 Na slici je prikazana pojednostavljena shema posude u kojoj se čuva tečni azot, koji se koristi za hlađenje u mnogobrojnim eksperimentima. Posuda ima dvostruke zidove, i vazduh između zidova se ispumpava vakuum pumpom. Neka je u posudi tečni azot, na temperaturi nižoj od 77 K. Između zidova je postignut vrlo nizak pritisak vazduha. Ako u tom slučaju dodirnete posudu, osetićete da je nešto hladnija od drugih predmeta, ali isto kao i bilo kakva metalna posuda. Kao da u unutrašnjosti nije vrlo hladna tečnost. Kada se povećava pritisak gasa između zidova suda, u jednom trenutku vodena para iz prostorije počne da se kondenzuje na posudi, odnosno posuda počne da se znoji. Ispostavlja se da je u visokom vakuumu srednji slobodan put molekula mnogo manji od rastojanja između zidova, d , a da kondenzacija postaje značajna kada srednji slobodni put postane značajno veći od d . Koristeći ove podatke odgovorite koji je dominantni mehanizam provođenja toplote između zidova suda i zašto?



Bolcmanova raspodela

- 3.30 Zašto je bilo potrebno da u zadatku 3.3 pretpostavimo da molarna masa ne zavisi od visine? Zar ona nije već konstantna?
- Toplotni kapacitet
- 3.31 Zašto nismo uzeli u obzir promenu potencijalne energije molekula usled zagrevanja?
- 3.32 Određena zapremina gasa H_2 se zagreva od 25 K do 500 K, tako da $\frac{dQ}{dT} = \text{const}$. Da li je zbog toga $\frac{dT}{dt} = \text{const}$?
- 3.33 (a) Ako dovedete istu količinu toplote jednom molu idealnog jednoatomske gasa i jednom molu idealnog dvoatomske gasa, kome će temperatura više da se poveća? (b) Zašto dvoatomske molekuli imaju veći toplotni kapacitet od jednoatomske?
- 3.34 Svi dvoatomske molekuli imaju isti toplotni kapacitet C_V . Da li to znači da je za zagrevanje jednog grama idealnog dvoatomske gasa za 1K, uvek potrebna ista količina toplote? Obrazložite odgovor.
- 3.35 Koristeći rezultat dobijen za toplotni kapacitet čvrstog tela izračunajte specifični toplotni kapacitet za aluminijum. Dobijeni rezultat uporedite sa podatkom iz tabele 17.3 (F&Y: $910 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$). Pažljivo pogledajte tu tabelu i pokušajte da objasnite razliku u rezultatima. Međusobna diskusija poželjna!
- 3.36 Izračunati specifični toplotni kapacitet pri konstantnoj zapremini za vodenu paru, pretpostavljajući da su translacioni i sva tri rotaciona stepena slobode pobuđena (a da vibracioni stepeni nisu). Specifični toplotni kapacitet vodene pare na niskim pritiscima je oko $2000 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$. Uporedite vaš rezultat sa ovim i procenite doprinos vibracionih stepeni slobode.
- 3.37 DISKUSIJA: Na slici 3.20 dijamant ima značajno manji toplotni kapacitet od aluminijuma i silicijuma na svakoj temperaturi. Da li možemo samo na osnovu tog podatka da kažemo bilo šta o strukturi kristala, zašto je to tako? (U okviru ovog kursa ne možemo dati precizan odgovor, ali pustite mašti na volju :))
- 3.38 Pogledajte tabelu sa podacima o toplotnom kapacitetu (2.3) i nađite jednoatomske kristale među navedenim materijalima.

4

Prvi zakon termodinamike

Mnogi procesi koji se dešavaju u našoj neposrednoj okolini, u sistemima sa velikim brojem čestica, su termodinamički procesi. Procesi u motoru sa unutrašnjim sagorevanjem, procesi prilikom kuvanja hrane, mehanizam rada frižidera...

Termodinamički sistem

Termodinamički sistem je svaki skup objekata koji može da se posmatra kao celina, i koji ima mogućnost da *razmenjuje* energiju sa okolinom.

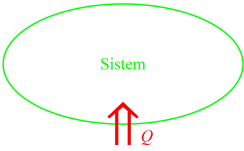
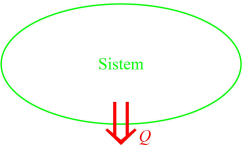
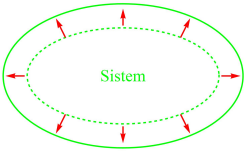
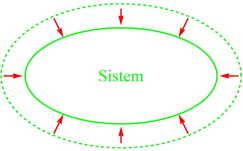
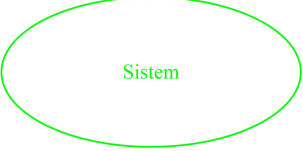
Primeri: bilo koja mašina, višćelijki organizam, gas u sudu, tečnost u posudi, automobili u saobraćaju u višemilionskom gradu, novac na berzi...

Svako stanje termodinamičkog sistema, termodinamičko stanje, određeno je skupom vrednosti termodinamičkih parametara.

Proces u kome se menjaju neke (ili sve) vrednosti termodinamičkih parametara se naziva termodinamički proces.

Kod definisanja određenog termodinamičkog sistema vrlo je važno unapred definisati šta je tačno sistem, a šta njegova okolina.

Kada sistem razmeni energiju sa okolinom, odnosno primi ili otpusti toplotu, on može da promeni stanje, pa samim tim i vrednosti termodinamičkih parametara (pritiska, zapremine, temperature...)

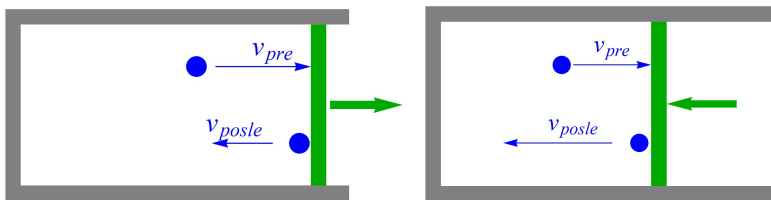
Znak	> 0	< 0	$= 0$
Q			
A			

Svaki termodinamički problem se posmatra iz ugla sistema. U tom smislu količina toplote koja se dovodi sistemu je pozitivna. Rad koji vrši sistem je pozitivan. U tabeli 4.1 su date sve mogućnosti koje predznak količine toplote i rada mogu da imaju.

Tabela 4.1: Predznaci količine toplote i rada termodinamičkog sistema.

Rad

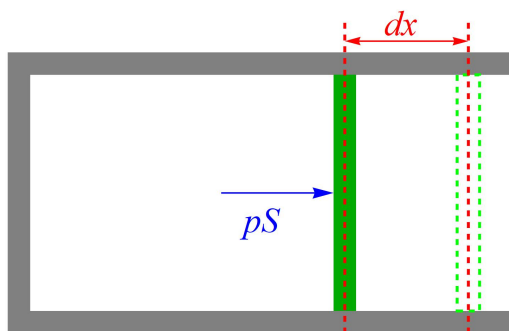
Rad vrši sistem, ili se rad vrši nad sistemom. Ne govori se o radu sila, već samo o radu sistema.



Slika 4.1: Sudari molekula sa klipom koji se kreće.

Neka se u sudu sa lako pokretnim klipom nalazi gas. Kada se klip pokreće tako da se gas širi (kao na levoj slici 4.1) onda se zapremina povećava ($dV > 0$). Molekuli gasa koji udaraju u klip predaju deo impulsa klipom i tako vrše rad na širenju gasa. Tada je rad gasa (sistema) pozitivan.

Kada se gas sabija, $dV < 0$, molekuli posle sudara sa klipom imaju nešto veći impuls, pa to znači da klip vrši rad na molekulima gasa, odnosno da je rad gasa (sistema) negativan.



Slika 4.2: Definicija rada termodinamičkog sistema.

U sudu sa klipom gas deluje silom pritiska pS na klip, slika 4.2. Ako se pri tome klip pomeri za dx , onda je rad:

$$dA = Fdx = pSdx = pdV. \quad (4.1)$$

Oдавде se vidi da je u procesima u kojima se ne menja zapremina sistema rad jednak nuli, odnosno:

$$dV = 0 \Rightarrow V = \text{const} \Rightarrow A = 0.$$

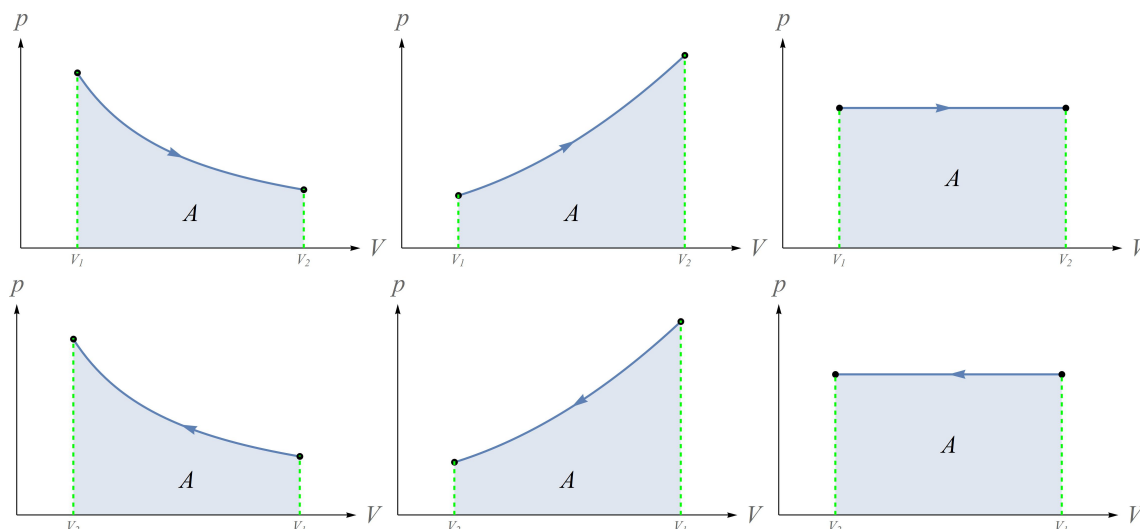
Iz izraza 4.1 se vidi da se rad u bilo kom termodinamičkom procesu može izračunati kao:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (4.2)$$

Da bi se izračunao rad, potrebno je znati oblik funkcije $p(V)$, odnosno jednačinu stanja.

Po smislu integrala, u jednačini 4.2, rad u nekim konačnim granicama je jednak površini ispod krive $p(V)$.

Da bi se otklonile nedoumice u narednim delovima, u nekom procesu vrednosti parametara su označene hronološkim redosledom, na primer, 1 je uvek stanje koje prethodi stanju 2, i tako dalje...



Slika 4.3: Rad u nekoliko različitih procesa.

Termodinamički procesi

Videli ste da je svaka promena termodinamičkih parametara sistema termodinamički proces.

Dva procesa na slici 4.3 su takva da se odvijaju pri konstantnom pritisku. Takvi procesi se nazivaju izobarskim. Rad pri izobarskom procesu je:

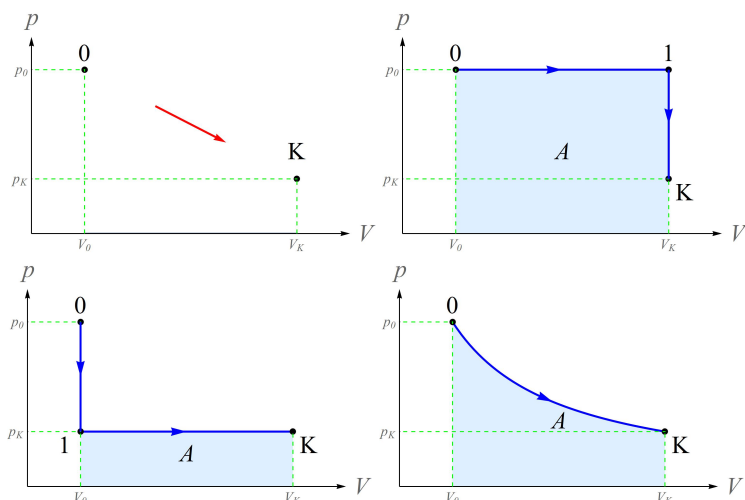
$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1). \quad (4.3)$$

Ako se u procesu temperatura ne menja, takav proces se naziva izotermiski. Za idealan gas $p = \frac{\nu RT}{V}$ je rad jednak:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (4.4)$$

Već na ovom nivou se može reći nekoliko važnih stvari vezanih za procese:

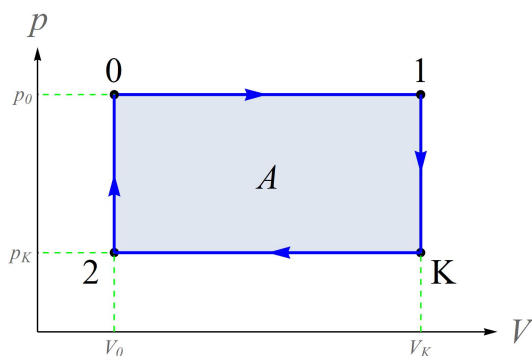
- Termodinamički sistem vrši rad, ili se nad sistemom vrši rad, ako mu se zapremina menja.
- Ako su temperature sistema i okoline različite doći će do razmene toplote.
- Sistem pri prelasku iz početnog u krajnje stanje u nekom procesu prolazi kroz međustanja. Čitav skup međustanja definiše termodinamički proces.
- Za svaki par početnog i krajnjeg stanja, postoji beskonačno mnogo mogućih međustanja.
- Ako su sva međustanja ravnotežna, onda proces može da se prikaže kao putanja na nekom dijagramu.



Slika 4.4: Rad pri različitim procesima, kojima je početno i krajnje stanje isto.

Neka sistem treba iz početnog stanja „0” da pređe u konačno stanje „K”. Bez preciziranja procesa to može da se ostvari na beskonačno mnogo načina. Na slici 4.4 je prikazano nekoliko procesa.

Vrlo je važno da se uoči da rad zavisi od putanje, odnosno od procesa kojim sistem stiže iz početnog u krajnje stanje (osjenčene površi na graficima 4.4).



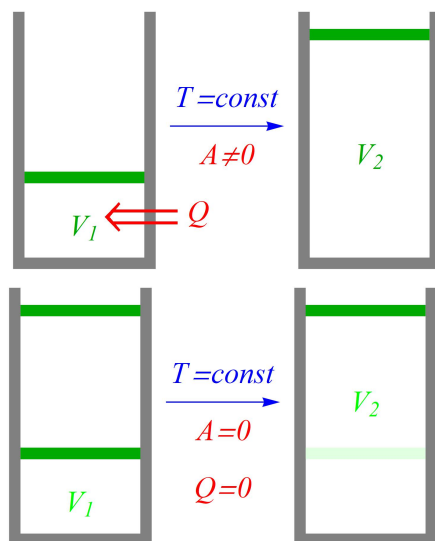
Slika 4.5: Rad u zatvorenom ciklusu.

Direktna posledica toga da rad zavisi od putanje (procesa) je da rad na zatvorenoj putanji (ciklusu) nije jednak nuli, što je prikazano na slici 4.5.

Možda nije očigledno, ali ista stvar je i sa količinom toplote.

Neka je sistem idealan gas koji se nalazi u sudu ispod lakog klipa (slika 4.6). Zapremina gasa je V_1 , temperatura T . Sistemu se dovede količina toplote Q , i gas se raširi do zapremine V_2 , ne menjajući temperaturu. Dakle sistem iz stanja (p_1, V_1, T) pređe u stanje (p_2, V_2, T) .

U drugom slučaju ista količina istog gasa se nalazi u istom početnom stanju, kao u prethodnom primeru. Neka u sudu nema klipa, nego u jednom trenutku se otvori ventil, ili se ukloni pregrada i gas zauzme zapreminu V_2 . Za ovo nije utrošena nikakva energija, odnosno $Q = 0$. Ovakav proces se naziva slobodna ekspanzija. Iako je gas promenio zapreminu, on ne vrši nikakav rad, zato što ne gura klip. Eksperiment pokazuje da ako se gas na ovoj temperaturi ponaša kao idealan, da mu se onda temperatura neće promeniti pri slobodnoj



Slika 4.6: Dva procesa sa istim početnim i krajnjim stanjem.

ekspanziji. Dakle, u tom slučaju sistem iz stanja (p_1, V_1, T) pređe u stanje (p_2, V_2, T) .

Početno i krajnje stanje za oba procesa je isto. U prvom procesu je $Q > 0$, $A \neq 0$. U drugom $Q = 0$, $A = 0$. Količina toplote zavisi od procesa u kome se razmenjuje sa sistemom.

Unutrašnja energija

Unutrašnja energija sistema čestica, U , je jednaka zbiru ukupne kinetičke energije svih molekula i ukupne potencijalne energije interakcije svih molekula u sistemu.

U unutrašnju energiju ne ulazi potencijalna energija molekula u spoljašnjem polju.

Unutrašnju energiju interagujućeg sistema molekula je često nemoguće izračunati.

Neka u nekom procesu sistem pri konstantnoj zapremini menja stanje, prelazi iz stanja 1 u stanje 2. Pošto je zapremina konstantna, rad je jednak nuli. Onda sva toplota ide na promenu kinetičke i potencijalne energije molekula odnosno na promenu unutrašnje energije. Neka sistem dalje iz stanja 2 prelazi u stanje 3, tako da ne razmenjuje toplotu sa okolinom. Sistem može da vrši rad ili rad može da se vrši nad sistemom, ali samo ako je to na račun promene kinetičke i potencijalne energije molekula, odnosno na račun promene unutrašnje energije. Ako se sada posmatra dvostepeni proces $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ i izrazi promena ukupne unutrašnje energije, dobija se:

$$\begin{aligned}
 1 \rightarrow 2 &\Rightarrow V = const \Rightarrow \Delta U_{12} = U_2 - U_1 = Q_{12}, \\
 2 \rightarrow 3 &\Rightarrow Q = 0 \Rightarrow \Delta U_{23} = -A_{23}, \\
 1 \rightarrow 3 &\Rightarrow \Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} = Q_{12} - A_{23}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Iz poslednje jednačine se vidi da je:

$$Q = \Delta U + A, \tag{4.6}$$

Odnosno u diferencijalnom obliku:

$$dQ = dU + dA. \quad (4.7)$$

Jednačine 4.6 i 4.7 predstavljaju prvi zakon termodinamike u integralnom i diferencijalnom obliku, respektivno. Prvi zakon termodinamike je zapravo zakon održanja energije u širem smislu od onog koji smo radili u okviru mehanike.

Prvi zakon termodinamike nije moguće izvesti iz nekih osnovnih postavki. Eksperimentalno je proveravan i samo je potvrđena njegova univerzalnost. U tom smislu jednačine 4.6 i 4.7 važe uvek, odnosno za bilo kakve procese.

Kao što ste videli u prethodnoj lekciji rad i količina toplote zavise od vrste termodinamičkog procesa, a da li promena unutrašnje energije zavisi od procesa? Eksperiment pokazuje da ne zavisi, već samo od početnog i krajnjeg stanja, za bilo koji termodinamički proces. Unutrašnja energija je zbog toga *funkcija stanja*.

Jedna od posledica činjenice da je unutrašnja energija funkcija stanja je da svako stanje sistema ima određenu unutrašnju energiju. Nju je često teško odrediti. Ali, ako promenimo stanje sistema, onda je promena unutrašnje energije merljiva, upravo zbog veze koju nam daje prvi zakon.

Sledeće dve posledice su vrlo važne:

- U cikličnim procesima ukupna promena unutrašnje energije je jednaka nuli, što znači da ukupna razmenjena toplota odlazi na rad; $\Delta U = 0 \Rightarrow Q = A$.
- Za izolovan sistem $Q = 0$, i ako sistem ne vrši rad, $A = 0$, onda je promena unutrašnje energije jednaka nuli, $\Delta U = 0$. Dakle, zbir ukupne kinetičke i potencijalne energije sistema molekula je konstantan, a to nije ništa drugo nego zakon održanja mehaničke energije.

Može da se kaže da je zakon održanja mehaničke energije za izolovan sistem specijalan slučaj prvog zakona termodinamike.

Unutrašnja energija idealnog gasa

Unutrašnja energija je zbir ukupne kinetičke i ukupne potencijalne energije interakcije molekula u sistemu.

U idealnom gasu interakcija između molekula je zanemarljivo mala, pa je potencijalna energija interakcije jednaka nuli. U tom slučaju je unutrašnja energija jednaka ukupnoj kinetičkoj energiji. Ranije je pokazano da srednja kinetička energija zavisi samo od temperature gasa, onda i ukupna kinetička energija zavisi samo od temperature. To znači da unutrašnja energija idealnog gasa zavisi samo od temperature gasa.

$$U = f(T).$$

U mnogim knjigama infinitezimalna količina toplote i rad su označeni drugačije nego infinitezimalna unutrašnja energija (δQ , δA , na primer), zbog toga što konačna promena ovih veličina zavisi od vrste termodinamičkog procesa.

Primer 4.1**Slobodna ekspanzija:**

U eksperimentu sa slobodnom ekspanzijom idealnog gasa, gas se nalazio u toplotno izolovanom sudu. Zbog toga nema razmene energije sa okolinom, $Q = 0$. Takođe, pri slobodnoj ekspanziji gas ne vrši rad. Na osnovu prvog zakona termodinamike sledi da je promena unutrašnje energije idealnog gasa pri slobodnoj ekspanziji jednaka nuli, $\Delta U = 0$, odnosno da je $U = \text{const}$. Merenjem je utvrđeno da se temperatura idealnog gasa ne menja prilikom slobodne ekspanzije. Time se dokazuje da unutrašnja energija idealnog gasa zavisi samo od temperature. U slučaju realnog gasa merenje pokazuje da se temperatura menja. Svi ostali zaključci dobijeni u slučaju idealnog gasa ostaju, tako da je i tada unutrašnja energija konstantna. Zbog toga što se temperatura menja unutrašnja energija ne može da zavisi samo od temperature. Najčešće se uzima da unutrašnja energija realnog gasa zavisi od temperature i zapremine, $U = f(T, V)$.

Toplotni kapacitet idealnog gasa

Molarni toplotni kapacitet po definiciji je:

$$C = \frac{1}{\nu} \frac{dQ}{dT}. \quad (4.8)$$

Molarni toplotni kapacitet je jednak količini toplote koju je potrebno dovesti jednom molu neke supstance da bi joj se temperatura promenila za jedan stepen.

Pored njega mogu se definisati i molarni toplotni kapaciteti za procese u kojima se neki od parametara ne menja. Tako je molarni toplotni kapacitet pri konstantnoj zapremini:

$$C_V = \frac{1}{\nu} \left. \frac{dQ}{dT} \right|_{V=\text{const}}, \quad (4.9)$$

odnosno pri konstantnom pritisku:

$$C_p = \frac{1}{\nu} \left. \frac{dQ}{dT} \right|_{p=\text{const}}. \quad (4.10)$$

Na isti način se definišu toplotni kapaciteti pri nekim drugim konstantnim parametrima (magnetno polje, magnetizacija...).

Posmatrajmo dva procesa:

- Idealnom gasu dovedemo toplotu, pri konstantnoj zapremini, $V = \text{const}$. Onda sva toplota ode na promenu unutrašnje energije, $Q = \Delta U$.
- U drugom procesu je pritisak konstantan, onda toplota ide i na promenu unutrašnje energije i na rad, $Q = \Delta U + A$.

Po definiciji toplotnih kapaciteta, u ova dva procesa, količine toplote su:

- $Q = \nu C_V \Delta T$,
- $Q = \nu C_p \Delta T$.

Neka je u oba procesa gas na istoj temperaturi pre nego što počne zagrevanje, i neka zagrevanje traje dok se postigne ista temperatura

(ΔT isto u oba procesa). Onda je promena unutrašnje energije ista u oba procesa. Količina toplote u drugom procesu ($p = \text{const}$) je veća zbog izvršenog rada, pa je samim tim:

$$C_p > C_V.$$

Vratimo se procesima opisanim nešto ranije.

- $V = \text{const}$: Infinitesimalna količina toplote, iz definicije toplotnog kapaciteta je $dQ = \nu C_V dT$. Pošto je rad jednak nuli onda je $dQ = dU$, odnosno $dU = \nu C_V dT$.
- $p = \text{const}$: $dQ = \nu C_p dT$. Rad je $dA = p dV$. Pošto je pritisak konstantan onda je $p dV = \nu R dT$. Pošto je $dQ = dU + p dV$, onda je $\nu C_p dT = dU + \nu R dT$.

Ako je ista infinitesimalna promena temperature dT , za idealan gas, onda je i promena unutrašnje energije ista, bez obzira na vrstu procesa, pošto unutrašnja energija zavisi samo od temperature, odnosno, unutrašnja energija idealnog gasa je:

$$dU = \nu C_V dT. \quad (4.11)$$

Ako ponovo iskoristimo vezu dobijenu za proces pri konstantnom pritisku dobijamo važnu relaciju:

$$\nu C_p dT = \nu C_V dT + \nu R dT,$$

odnosno:

$$C_p - C_V = R. \quad (4.12)$$

Razlika toplotnih kapaciteta idealnog gasa je konstantna. Ranije je pokazano da je C_V konstantno, odnosno $C_V = \frac{i}{2} R$. Onda je i C_p konstantno, odnosno:

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R. \quad (4.13)$$

Može se definisati još jedna važna veličina, a to je količnik toplotnih kapaciteta:

$$\frac{C_p}{C_V} = \gamma, \quad (4.14)$$

gde je γ eksponent adijabate.

$$\gamma = \frac{i+2}{i}. \quad (4.15)$$

Vidi se da je $\gamma > 1$. Takođe, ovaj količnik je konstantan za gas istog tipa, odnosno za isti broj aktivnih stepeni slobode.

Toplotni kapaciteti se mogu izraziti preko eksponenta adijabate:

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad (4.16)$$

$$C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}. \quad (4.17)$$

Vrste termodinamičkih procesa

Izohorski proces

Ako se u nekom procesu zapremina sistema ne menja, takav proces se naziva *izohorski*. Iz definicije rada je jasno da ako se zapremina ne menja da je onda rad jednak nuli:

$$V = \text{const} \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Pri izohorskom procesu razmenjena toplota ide direktno na promenu unutrašnje energije, $\Delta U = Q$.

Izobarski proces

Proces koji se odvija pri konstantnom pritisku se naziva *izobarski proces*.

Kao što je bilo pokazano, rad pri izobarskom procesu je:

$$A = p\Delta V.$$

Izotermni proces

Proces pri kome temperatura sistema ostaje ista je *izotermni proces*.

U poređenju sa adijabatskim procesima, izotermni procesi su nešto sporiji. Sistemu je potrebno vreme da uspostavi ravnotežu u svakom međustanju.

Ranije je izračunat rad pri izotermnom procesu (jednačina 4.4), za idealan gas. Za druge sisteme potrebno je znati jednačinu stanja, i iz nje izvesti izraz za rad.

Adijabatski proces

Po definiciji, adijabatski proces je proces u kome nema razmene toplote sistema sa okolinom:

$$Q = 0. \quad (4.18)$$

Idealan adijabatski proces je moguć samo u dobro izolovanom sistemu. Sa druge strane u realističnim sistemima u procesima koji se vrlo brzo odvijaju moguće je da nema dovoljno vremena da se toplota razmeni sa okolinom, pa su i oni adijabatski.

U adijabatskom procesu rad se vrši na račun promene unutrašnje energije:

$$Q = 0 \Rightarrow \Delta U = -A,$$

odnosno:

$$dU = -pdV. \quad (4.19)$$

KADA JE SISTEM IDEALAN GAS može da se uoči nekoliko važnih činjenica.

- Ako gas vrši rad u adijabatskom procesu, onda se hladi, i obrnuto.

- Ako se gas brzo širi u adijabatskom procesu onda se brzo i hladi.

Iz jednačine 4.19 se mogu izvesti dodatne veze između termodinamičkih parametara, takozvane Poasonove relacije. Iz jednačine 4.19, u slučaju idealnog gasa, dobija se:

$$\nu C_V dT = -pdV.$$

Kada se pritisak izrazi preko ostalih veličina iz jednačine stanja idealnog gasa, dobija se:

$$\nu C_V dT = -\frac{\nu RT}{V} dV,$$

odakle se razdvajanjem promenljivih stiže do:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V} \frac{dV}{V}.$$

Ova jednačina je diferencijalna jednačina sa razdvojenim promenljivim. Rešava se tako što se obe strane jednačine integriraju:

$$\int \frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V} \int \frac{dV}{V},$$

$$\ln T = -\frac{R}{C_V} \ln V + \text{const},$$

što je ekvivalentno izrazu:

$$TV^{\frac{R}{C_V}} = \text{const}.$$

Kada se iskoristi izraz za C_V , 4.16, dobija se:

$$\frac{R}{C_V} = \gamma - 1,$$

pa je konačno, jedna on veza između parametara idealnog gasa za adijabatski proces je:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (4.20)$$

Na osnovu ove relacije i jednačine stanja dobijaju se još dve Poasonove relacije:

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (4.21)$$

$$pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const}. \quad (4.22)$$

Poasonova relacija 4.21 nam daje jednu vrlo važnu informaciju:

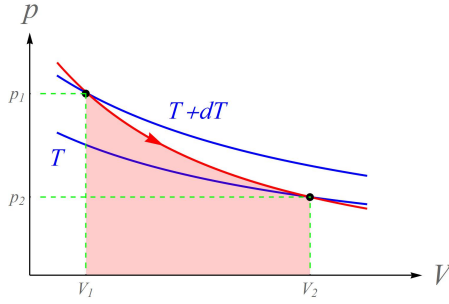
$$pV^\gamma = \text{const} \Rightarrow p \sim \frac{1}{V^\gamma}.$$

Ranije je pokazano je da je $\gamma > 1$. Kada se ova zavisnost uporedi sa izotermom za koju je:

$$p \sim \frac{1}{V},$$

vidi se da je adijabata strmija od izoterme na (p, V) dijagramu, slika 4.7.

Specijalna posuda za kuvanje na pritisku koji je viši od atmosferskog se naziva ekspres lonac. Ovaj lonac na poklopcu ima ventil koji se pomera tokom kuvanja i izbacuje višak vodene pare. Kada se kuvanje završi potrebno je pre otvaranja poklopca ispustiti vodenu paru iz lonca tako da se pritisci u loncu i van lonca izjednače. Tek tada je bezbedno otvoriti lonac. Prilikom ispuštanja vodene pare iz lonca, para koja je u loncu na temperaturi znatno višoj od 100°C , se tako brzo ohladi da već na rastojanju od desetak centimetara od ventila ona nije mnogo toplija od vazduha u prostoriji. To je zato što se para širi brzo adijabatski i vrlo brzo se hladi.



Slika 4.7: Izotermni (plave linije) i adijabatski procesi (crvena linija).

Oblik krive koja predstavlja adijabatski proces kao rezultat ima činjenicu da ako se izoterma i adijabata seku u nekoj tački, onda je adijabata uvek strmija od izoterme. Zanimljivo je pogledati i rad koji gas izvrši pri širenju. Ako je promena zapremine ista, vide se dva slučaja. Ako je početno stanje isto veći rad će izvršiti gas pri izotermnom procesu. Ako je konačno stanje isto, onda će veći rad biti pri adijabatskom. Slično je i za sabijanje gasa.

Rad je jednak smanjenju unutrašnje energije, odnosno:

$$A = -\Delta U \Rightarrow A = \nu C_V (T_1 - T_2),$$

odakle se jasno vidi da ako se idealan gas širi onda se hladi, i obrnuto, ako se sabija onda se greje, kao što je na početku lekcije napisano.

Već je napisano da su adijabatski procesi uglavnom brzi, ali treba biti pažljiv sa tim iskazom. Procesu su brzi toliko da sistem ne stigne da razmeni toplotu sa okolinom. Ali, sa druge strane, ako razmatramo procese koji prolaze kroz niz ravnotežnih stanja, oni ne smeju da budu previše brzi. Moraju da budu dovoljno spori da svako međustanje sistema bude ravnotežno, termodinamički i mehanički.

Politropski proces za idealan gas

Posebnu grupu termodinamičkih procesa čine procesi tokom kojih se ne menja molarni toplotni kapacitet. Takvi procesi se nazivaju *politropski procesi*. Politropski procesi idealnog gasa imaju dodatnu vezu između termodinamičkih parametara.

Ako se količina toplote izrazi preko molarnog toplotnog kapaciteta, prvi zakon termodinamike može da se napiše u obliku:

$$\nu C dT = p dV + \nu C_V dT. \quad (4.23)$$

S druge strane, diferenciranjem jednačine stanja idealnog gasa, dobija se:

$$pV = \nu RT \Rightarrow p dV + V dp = \nu R dT.$$

Koristeći vezu dobijenu diferenciranjem jednačine stanja može da se eliminiše temperatura iz jednačine 4.23:

$$\begin{aligned} \frac{C - C_V}{R} (p dV + V dp) &= p dV, \\ \left(\frac{C - C_V}{R} - 1 \right) p dV &= - \left(\frac{C - C_V}{R} \right) V dp. \end{aligned}$$

Ako se iskoristi da je za idealan gas $C_p - C_V = R$, i razdvajanjem promenljivih pritiska i zapremine, dobija se:

$$\frac{dp}{p} = - \left(\frac{C - C_p}{C - C_V} \right) \frac{dV}{V}.$$

Neka je konstantni koeficijent iz jednačine:

$$\alpha = \frac{C - C_p}{C - C_V}, \quad (4.24)$$

eksponent politrope, onda je rešenje gornje diferencijalne jednačine:

$$pV^\alpha = \text{const.} \quad (4.25)$$

Iz izraza za eksponent politrope idealnog gasa, vidi se da je za izohorski proces $\alpha = \infty$, za izobarski $\alpha = 0$, dok je za adijabatski $\alpha = \gamma$.

Na isti način kao i za adijabatski proces, iz jednačine stanja mogu da se izvedu i preostale veze: $TV^{\alpha-1} = \text{const}$ i $pT^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \text{const}$.

Iz izraza za eksponent politrope može da se dobije izraz za molarni toplotni kapacitet. Ako se iskoriste izrazi za molarne toplotne kapacitete pri konstantnoj zapremini i pritisku, 4.13, dobije se:

$$C = \frac{\alpha - \gamma}{(\alpha - 1)(\gamma - 1)} R. \quad (4.26)$$

Iz fizičkih razloga molarni toplotni kapacitet bi trebalo da bude pozitivan. Izraz za idealan gas, 4.26, je uvek pozitivan, osim kada je eksponent politrope između 1 i γ ($1 < \alpha < \gamma$), s obzirom da je eksponent adijabate, po definiciji, veći od jedan.

Zadaci

Termodinamički sistem

- 4.1 Da li su moguće sve kombinacije iz tabele 4.1? Odnosno, da li su pri dovođenju toplote moguće sve tri vrste procesa u kojima će rad biti pozitivan, negativan, ili jednak nuli? Isto i za odvođenje toplote i za izolovan sistem. Koristite samo do sada pređeno gradivo!

Rad

- 4.2 Na slici 4.3 je prikazano nekoliko termodinamičkih procesa. U kojim procesima je rad pozitivan, negativan i jednak nuli?

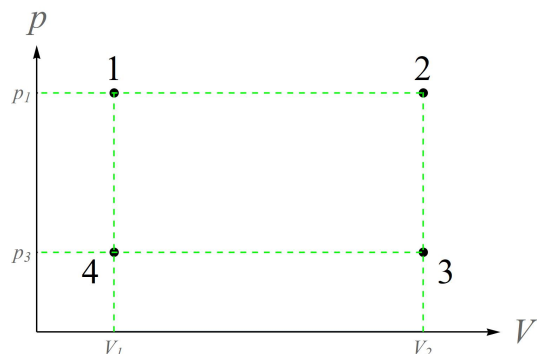
Termodinamički procesi

- 4.3 Koliko se puta promeni zapremina u izotermnom procesu, ako je rad jednak νRT , odnosno $2\nu RT$?
- 4.4 U šolju sipate vruću kafu. Koji je znak količine toplote za kafu? Koji je znak Q za šolju? Da li znak zavisi od materijala od koga je napravljena

šolja? Da li možete da zamislite situaciju u kojoj vruću kafu sipate u šolju, a da znak Q bude drugačiji nego u prvom slučaju?

- 4.5 Neka količina idealnog gasa se širi od zapremine V_1 do zapremine $V_2 = 2V_1$. Konačni pritisak gasa je p_2 . (a) Da li gas izvrši veći rad ako je pritisak tokom širenja konstantan ili ako se tokom širenja ne menja temperatura? (b) Koliki je odnos izvršenih radova u ova dva slučaja?
- 4.6 Pogrešno je reći da termodinamički sistem ima toplotu, ali sistem može da razmenjuje toplotu sa drugim sistemom. Kako može da razmenjuje nešto čega nema?
- 4.7 U kojoj situaciji ćete izvršiti veći rad pri naduvavanju istog balona do iste zapremine, u Beogradu ili na vrhu Tare?
- 4.8 Idealni gas može da se nađe u jednom od stanja prikazanih na slici. Sistem iz jednog stanja može da pređe u neko drugo sa slike u procesu koji se

na slici predstavlja kao prava linija. Sortirati (algebarski), od procesa u kojem se vrši najveći rad do procesa u kojem se vrši najmanji rad, procese $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$, $1 \rightarrow 4$, $2 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 4$, $3 \rightarrow 1$, $3 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 1$, $4 \rightarrow 2$ i $4 \rightarrow 3$.



Unutrašnja energija

- 4.9 Jednog lepog dana pojedete poslasticu od 900 Cal u poslastičarnici. Na koju visinu treba da se popnete da biste potrošili sve kalorije? Kako komentarišete rezultat?
- 4.10 Jedan gram vode ispari u 1671 cm^3 vodene pare, pri atmosferskom pritisku. Ako je latentna toplota isparavanja vode $\lambda = 2.256 \times 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$, izračunati rad i promenu unutrašnje energije pri ovom faznom prelazu. Kako biste komentarisali rezultat, koji proces je dominantan?
- 4.11 Sortirajte sledeće procese, od onog sa najvećom promenom unutrašnje energije do onog sa najmanjom (algebarski). (a) Vršite rad od 2J nad sistemom, dok sistem predaje toplotu od 2J okolini. (b) Vršite rad od 2J nad sistemom, dok sistem absorbuje toplotu od 2J od okoline. (c) Sistem vrši rad od 2J nad vama, dok predaje toplotu od 2J okolini. (d) Sistem vrši rad od 2J nad vama, dok absorbuje toplotu od 2J od okoline.

Prvi zakon i termodinamički procesi

- 4.12 Zamislite gas sastavljen od elektrona. Zbog nalektrisanja elektroni se međusobno odbijaju. Kako će se promeniti temperatura ovog gasa pri slobodnoj ekspanziji? Objasnite.
- 4.13 Veliki balon sa toplim vazduhom je konstruisan tako da na dnu ima otvor u kome se nalazi grejač koji greje vazduh u balonu. Zbog otvora na dnu balona pritisak vazduha u balonu je uvek isti kao i van balona. Konstrukcija je takva da je zapremina balona konstantna. Kada se uključi grejač vazduh u balonu se zagreje. Kako je to moguće ako je vazduh idealan gas?

4.14 Šta bi se promenilo prilikom slobodne ekspanzije realnog (Van der Valsvog) gasa u odnosu na slobodnu ekspanziju idealnog gasa. Sud je toplotno izolovan. Detaljno objasnite.

Idealan gas

- 4.15 Da li unutrašnja energija kristala može da zavisi samo od temperature? Objasniti?
- 4.16 Zašto nismo definsali toplotni kapacitet pri konstantnoj temperaturi?
- 4.17 Ohladite sobu sa 24°C na 12°C , pretpostavljajući da se pritisak u ovom procesu ne menja. Kolika je promena unutrašnje energije? Da li bi se rezultat razlikovao da je vazduh jednoatomski gas?
- 4.18 Videli ste da je za idealan gas unutrašnja energija jednaka ukupnoj kinetičkoj energiji. Ako uporedite jednačinu 3.7, za jedan mol supstance, sa jednačinom 4.11, za jedan mol supstance vidite da ove dve veličine nisu iste. Kako je to moguće?
- 4.19 Tokom sunčanih dana, veliki „mehuri“ vazduha se formiraju iznad zagrejanog tla, postepeno se šire i oslobađaju tako što se podižu uvis. Ovakva kretanja vazdušnih masa se nazivaju termali. Ptice i jedriličari koriste ove „vetrove“ za podizanje bez pogona. Širenje vazduha koje dovodi do termala je adijabatski proces. Objasnite zašto.
- 4.20 Gledajući višegodišnje proseke količine padavina u Srbiji, najviše kiše padne u zapadnoj Srbiji, oko planina Zlatibora, Zlatara i Tare. Pretpostavimo jednostavan model. Neka se to dešava zbog stalnih vetrova koji duvaju sa jugozapada donoseći vlagu sa Jadranskog mora (radna pretpostavka, ne mora da bude tačna). Kada takav vetar naleti na planinu i počne da duva uz padinu, vazduh se hladi, vodena para se kondenzuje, i pada kiša. Objasnite zašto se vetar hladi kad počne da duva uz planinu?
- 4.21 U izohorskom procesu promena unutrašnje energije idealnog gasa je $dU = \nu C_V dT$. Zašto u izobarskom procesu nije $dU = \nu C_p dT$?
- 4.22 Idealan gas se širi pri konstantnom pritisku. Da li gas tokom ovog procesa prima ili predaje toplotu? Objasnite.
- 4.23 U sudu je idealan jednoatomski gas. Gasu se dovodi toplota usled čega se on proširi pri konstantnom pritisku. Koliki deo toplote ode na rad pri širenju gasa?

- 4.24 Dva mola idealnog gasa N_2 se nalazi u sudu ispod pokretnog klipa. (a) Gas je zagrejan izohorski (klip je fiksiran) tako što mu je dovedena količina toplote od 1247 J. Za koliko se promenila temperatura gasa? (b) Za koliko se promeni temperatura ako se ista količina toplote dovede ovom gasu, ali kada je klip oslobođen, odnosno kada je pritisak konstantan? Početno stanje je isto. (c) U kojem od ova dva procesa je veća unutrašnja energija u konačnom stanju?

Adijabatski proces

- 4.25 Za brzo kuvanje hrane može da se koristi ekspres lonac. Lonac obezbeđuje da pritisak u sudu bude veći nego van suda, i to može da bude značajno veći. Šta je sa temperaturom ključanja vode u takvom loncu? Zašto se u njemu hrana brže skuva?
- 4.26 Leti, kada otvaramo hladno piće, koje se nalazi u staklenoj ambalaži, u trenutku otvaranja na samom vrhu boce se napravi oblačić vodene pare. Zašto?
- 4.27 U cilindru koji se nalazi u dizel motoru odnos najveće i najmanje zapremine je 15. (a) Ako je početni pritisak približno jednak atmosferskom, i početna temperatura približno jednaka sobnoj (300 K), izračunajte pritisak i temperaturu sabijenog vazduha. Uzeti da se gas sabijao adijabatski, i da je $\gamma = 1.4$. (b) Koliki rad izvrši gas pri ovom sabijanju ako je početna zapremina cilindra 1 l.
- 4.28 U četiri identična suda ispod klipa se nalaze iste količine gasa, na istoj temperaturi i pritisku. U sva četiri suda se zapremina smanji na polovinu. Sortirajte po pritisku gasa posle sabijanja, od najvećeg do najmanjeg: (sud 1) jednoatomski gas sabijen izotermiski; (sud 2) jednoatomski gas sabijen adijabatski; (sud 3) dvoatomski gas sabijen izotermiski; (sud 4) dvoatomski gas sabijen adijabatski. (b) U kom sudu je bilo potrebno izvršiti najveći rad?
- 4.29 U dva suda se nalazi ista količina gasova UF_6 i H_2 . Ako u oba suda dovedete istu količinu toplote koji gas će se brže zagrevati? Objasnite.
- 4.30 U adijabatskom procesu idealnom gasu se smanjuje pritisak. Kako se menja unutrašnja energija gasa? Objasnite.
- 4.31 Košarkaš vodi loptu. Pri svakom udarcu lopte u pod zapremina joj smanji do oko 20 % (tokom

kontakta sa podom deformiše se, dostiže najveću deformaciju, zatim se vraća u početni oblik i tako odskoče od poda). Pretpostavite da je vazduh zapravo azot, početne temperature $20^\circ C$ i pritiska od 2 atm. Prečnik lopte je 23.9 cm. Kolika je temperatura gasa u trenutku najveće kompresije? Za koliko se unutrašnja energija promeni od početnog stanja do trenutka najveće kompresije?

- 4.32 Izvedite relacije 4.21 i 4.22.

Razni zadaci

- 4.33 U masivnom čeličnom cilindru se nalazi 12 litara tečnog metanola pod klipom. Poprečni presek cilindra je $0.02 m^2$. Na klip deluje sila od $3 \times 10^4 N$. Metanol se zagreje od $20^\circ C$ do $50^\circ C$. Zapreminski koeficijent širenja metanola je $1.2 \times 10^{-3} K^{-1}$, gustina je $791 \frac{kg}{m^3}$ i specifični toplotni kapacitet pri konstantnom pritisku je $c_p = 2.51 \times 10^3 \frac{J}{kg \cdot K}$. Toplotno širenje cilindra može da se zanemari. (a) Za koliko se promenila zapremina metanola? (b) Koliki rad pri širenju izvrši metanol? (c) Kolika je količina toplote dovedena metanolu u ovom procesu? (d) Kolika je promena unutrašnje energije metanola? (e) Na osnovu ovih rezultata, za metanol u ovim uslovima, procenite da li postoji razlika između c_p i c_V ?
- 4.34 Bakarna kocka, dužine stranice 2 cm, je okačena o žicu. Kocka je zagrejana od $20^\circ C$ do $90^\circ C$, pri atmosferskom pritisku okolnog vazduha. (a) Za koliko se promenila zapremina kocke? (b) Koliki je rad izvršila kocka tokom širenja? (c) Kolika je količina toplote dovedena kocki? (d) Za koliko se promenila unutrašnja energija kocke? (e) Da li ima razlike između c_p i c_V ? Gustina bakra je $8.9 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$, koeficijent zapreminskog širenja $5.1 \times 10^{-5} K^{-1}$, specifična toplota pri konstantnom pritisku $390 \frac{J}{kg \cdot K}$.
- 4.35 Insekt afrički bombardier, dugačak oko 2cm, ima vrlo neobičan mehanizam samodbrane. U slučaju opasnosti on može da štrcne odbrambenu tečnost kroz cevčicu na telu u smeru napadača. Ovo izbacivanje tečnosti nije posledica kontrakcije nekih mišića, već hemijski proces. U telu insekta se nalaze komore sa dve tečnosti, kada je buba uznemirena tečnosti se pomešaju u posebnoj komori stvarajući jedinjenje koje se brzo zagreje od $20^\circ C$ do $100^\circ C$, usled hemijske reakcije. Tako se stvori veliki pritisak novonastale tečnosti

- koji omogućava da tečnost izleti kroz tanku cev-
čicu brzinom oko $19 \frac{m}{s}$. Izračunajte toplotu koja
se oslobodi u ovoj hemijskoj reakciji. Uzmite da
su specifične toplote za obe tečnosti iste kao i za
vodu.
- 4.36 Ogromni meteorološki balon je napunjen heliju-
mom, zapremina mu je $2000 m^3$, pritisak norma-
lan atmosferski, temperatura $15^\circ C$, brzo se penje
do visine na kojoj je pritisak $0.9 atm$. Pretposta-
vite da je helijum idealni gas i da se balon penje
suviše brzo da bi razmenio toplotu sa okolinom.
(a) Kolika je zapremina balona na konačnoj visi-
ni? (b) Kolika je temperatura gasa? (c) Kolika je
promena unutrašnje energije gasa?
- 4.37 (a) Izračunajte rad koji vrši van der Valsov gas
pri izotermnom širenju od V_1 do V_2 . (b) Po-
kažite da se u slučaju kada je $a = b = 0$ do-
bija rezultat za idealan gas. (c) Za etan $a =$
 $0.554 Jm^3/mol^2$, $b = 6.38 \times 10^{-5} m^3/mol$, izraču-
najte rad koji izvrši $1.8 mol$ etana pri širenju od
 $2 \times 10^{-3} m^3$ do $4 \times 10^{-3} m^3$, na konstantnoj tem-
peraturi od $300 K$. (d) Izračunajte rad za isti pro-
ces pretpostavljajući da je etan idealan gas. (e)
Kolika je razlika u ovim radovima? (f) U kom
slučaju se vrši veći rad? (g) Koristeći fizički smi-
sao popravke koju u odnosu na idealan gas do-
nosi van der Valsova jednačina objasnite razliku.
(h) Da li etan pri ovim uslovima može da se tre-
tira kao idealan gas?

5

Drugi zakon termodinamike

Iskustvo nam kaže da se toplota uvek prenosi sa toplijeg na hladnije telo, nikad obrnuto. Obrnut proces ne bi narušio prvi zakon termodinamike (odnosno zakon održanja energije), ali se ne dešava. Kao da postoji još neki zakon koji zabranjuje ovakve procese. Šaljiva formulacija ovog zakona bi mogla da bude:

Ono što niko nije video da se desilo, verovatno i ne može da se desi.

Mehaničku energiju nije teško kompletno pretvoriti u toplotnu (zagrevanje točka od bicikla prilikom kočenja do zaustavljanja...), ali mnogi uređaji mogu da transformišu samo deo toplote u mehaničku energiju (motori...). Ne postoji uređaj koji može potpuno da transformiše toplotu u mehaničku energiju. Očigledno je da nije svaki smer termodinamičkog procesa moguć.

Smer termodinamičkog procesa

Svi procesi u prirodi su ireverzibilni (nepovratni):

- Prenos toplote sa toplijeg na hladnije telo je nepovratan proces.
- Slobodna ekspanzija gasa.
- Telo koje klizi po hrapavoj podlozi se zagreva, ali nije moguće da telo miruje na hrapavoj podlozi, ohladi se i pokrene.

Postoje procesi koji se mogu idealizovati, koji su približno reverzibilni. Sistem koji učestvuje u reverzibilnom procesu uvek je vrlo blizu termodinamičke ravnoteže sa sobom i sa okolinom. Svaka promena stanja tada može da bude reverzibilna, ako se neki od termodinamičkih parametara infinitezimalno malo menja. Na primer, razmena toplote između dva sistema čije se temperature infinitezimalno malo razlikuju.

Reverzibilni procesi su ravnotežni procesi, sistem je u svakom trenutku u (skoro) ravnotežnom stanju, preciznije kvaziravnotežnom. Stanje mora biti kvaziravnotežno zato što promena stanja sistema koji je u ravnotežnom stanju, infinitezimalnom promenom parametara nije moguća.

Realni ireverzibilni procesi su takvi da ni mala promena parametara ne može da ih natera da okrenu smer (na primer slobodna ek-

spanzija). Ni u jednom trenutku sistemi nisu u ravnotežnom stanju, dok ne dostignu konačno stanje.

Svi termodinamički procesi u prirodi se mogu podeliti na:

- kvaziravnotežne, reverzibilne (aproksimativno);
- neravnotežne, ireverzibilne.

Da bi se dublje ušlo u smisao mogućih smerova procesa, treba otvoriti još jednu temu, a to je neuređenost sistema.

- Ako špil složenih (po bilo kom pravilu) karata bacite u vazduh, kada karte padnu na pod teško da će biti bilo kakvog reda među njima.
- Spremate salatu. Ubacite sve povrće u veliku činiju, na primer, prvo grašak, pa kukuruz šećerac, pa seckanu šargarepu... Počnete da mešate povrće. Da li može da se desi da posle nekog vremena povrće ponovo bude slojevito raspoređeno (sav grašak na dnu i tako dalje)?
- Slično prethodnom, sipajte kap mastila u vodu, i posmatrajte kao se boja rasprostire po celoj čaši. Neće se desiti da ako dovoljno dugo ostavite čašu da se mastilo ponovo skoncentriše u jednu kap.
- Neki gas se slobodno raširi. Da li je moguće da se u nekom trenutku sam od sebe vrati, na primer, u samo jednu polovinu suda?

Svi procesi u pomenutim primerima uvek se odvijaju na isti način. U prva tri primera je očigledno šta se podrazumeva pod uređenjem, karte su složene, povrće je sipano sloj po sloj. Proces se odvijaju tako da se to uređenje potpuno naruši. Sistem postaje neuređeniji. Šta je uređenje u poslednjem primeru biće objašnjeno nešto kasnije.

Još jedna važna napomena u svetlu ovog uvoda. Kada govorimo o kinetičkoj energiji u termodinamičkom sistemu govorimo o dve kinetičke energije. Kinetička energija molekula u sistemu koja odgovara njihovom nasumičnom kretanju je povezana sa temperaturom sistema, može da se nazove i mikroskopskom kinetičkom energijom. Ako se molekuli uz haotično kretanje, kreću i organizovano, koordinisano, onda takvo kretanje takođe doprinosi kinetičkoj energiji. Neka se ovaj deo kinetičke energije zove makroskopska kinetička energija.

Kada se sistemu dovodi toplota, ona može delimično da ode na promenu makroskopske kinetičke energije, ali deo se uvek gubi u tome što toplota ode i na promenu mikroskopske kinetičke energije. Recimo, kada gas koji zagrevamo gura klip, dovodenje toplote povećava kinetičku energiju molekula. Oni se brže kreću i u smeru kretanja klipa. Ali, pri dovodenju toplote menjaju se i sve ostale komponente brzine. Ne može celokupna toplota da se potroši na promenu samo jedne komponente brzine. U suprotnom smeru, kada koordinisano kretanje prestane, onda se kompletna makroskopska kinetička energija pretvori u mikroskopsku. Molekuli se u srednjem brže kreću, odnosno kreću se haotičnije. Dakle, dovodenje ili provođenje toplote uključuje povećanje nereda u sistemu.

Toplotne mašine

- Svaki uređaj koji toplotu delimično pretvara u mehanički rad ili mehaničku energiju je toplotna mašina.
- Osnovni deo toplotne mašine je sistem koji prima i otpušta toplotu i menja zapreminu (vrši i trpi rad). Ovaj sistem se naziva radno telo.
- Ako su procesi koji se odvijaju u nekoj toplotnoj mašini takvi da se posle niza procesa sistem vraća u isto stanje, i nastavlja sa istim nizom procesa, onda se takvi procesi nazivaju ciklični.
- Toplotna mašina prima toplotu od nekog izvora, izvrši rad i preda ili izgubi deo toplote.
- Sistem koji radnom telu predaje toplotu je toplotni rezervoar, koji ćemo zvati grejač. Pretpostavićemo procese u kojima grejač ne menja temperaturu ni posle mnogo ciklusa.
- Sistem kome radno telo predaje toplotu zvaćemo hladnjak. Takođe ćemo razmatrati samo slučajeve u kojima se temperatura hladnjaka ne menja posle velikog broja izvršenih ciklusa.
- Ograničićemo se na slučajeve u kojima je temperatura grejača mnogo veća od temperature hladnjaka, $T_g \gg T_h$.

Pretpostavke za toplotne rezervoare znače da tokom dovoljnog broja ciklusa samo radno telo menja termodinamička stanja.

Ranije je pokazano da je u cikličnom procesu ukupna promena unutrašnje energije jednaka nuli, $\Delta U = 0$. To znači da je ukupna toplota u ciklusu otišla na ukupni rad sistema. Treba imati na umu da je ukupna toplota jednaka algebarskom zbiru svih toplota u svim procesima tokom ciklusa. Isto važi i za rad.

Pošto radno telo jedino menja stanja tokom ciklusa, onda se ceo ciklus posmatra u odnosu na radno telo. Tako je, po ranijem dogovoru, količina toplote koja se predaje radnom telu pozitivna, Q_g , a količina toplote koju radno telo predaje hladnjaku, Q_h , negativna:

$$Q_g > 0, Q_h < 0.$$

Rad koji vrši radno telo je pozitivan, dok je rad nad radnim telom negativan.

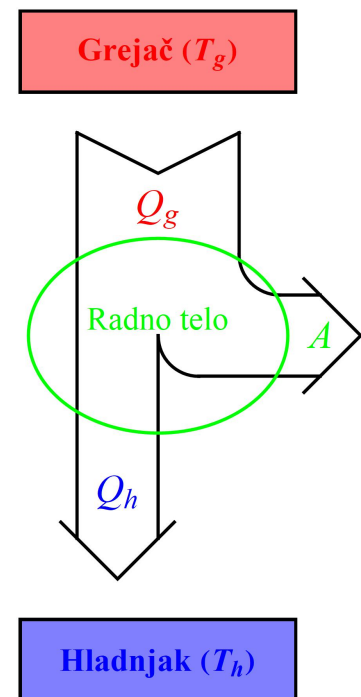
Ukupna toplota razmenjena u jednom ciklusu je:

$$Q = Q_g + Q_h = Q_g - |Q_h|.$$

Ukupan rad je jednak ukupnoj toploti:

$$A = Q_g - |Q_h|.$$

Idealno bi bilo da se sva toplota koja se preda radnom telu pretvori u rad, ali, kao što će kasnije biti pokazano, to nije moguće.



Slika 5.1: Shematski prikaz toplotne mašine.

Kvalitet toplotne mašine se opisuje bezdimenzionalnom veličinom koja se naziva koeficijent korisnog dejstva, η :

$$\eta = \frac{A}{Q_g} = 1 - \frac{|Q_h|}{Q_g} = 1 + \frac{Q_h}{Q_g}. \quad (5.1)$$

Ako nije moguće da se sva toplota predata radnom telu pretvori u rad, onda je $Q_h \neq 0$, a to znači da je je koeficijent korisnog dejstva strogo manji od 1.

Primer 5.1

Motor kamiona u jednom ciklusu dobija 10^4 J toplote, i izvrši rad od 2 kJ . Latentna toplota sagorevanja goriva je $q_s = 5 \times 10^4 \frac{\text{J}}{\text{g}}$. Izračunati: (a) Koeficijent korisnog dejstva motora. (b) Količinu toplote koju motor preda hladnjaku, po jednom ciklusu. (c) Koliko goriva sagori u motoru po jednom ciklusu? (d) Ako motor napravi 25 ciklusa u sekundi kolika je snaga motora? (e) Koliko goriva sagori u motoru za jedan sekund, za jedan sat?

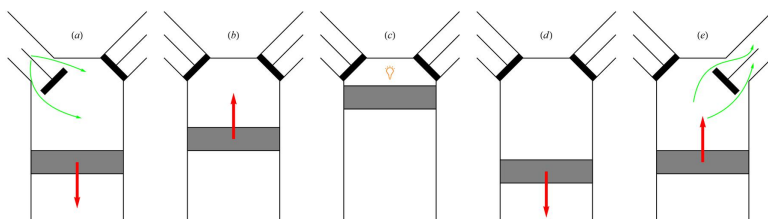
Rešenje:

(a) Po definiciji: $\eta = \frac{A}{Q_g} = \frac{2 \times 10^3 \text{ J}}{10^4 \text{ J}} = 0.2$. (b) $Q_h = A - Q_g = -8000 \text{ J}$. (c) Toplota se dobija od sagorevanja goriva, pa je $Q_g = mq_s$, odakle je $m = \frac{Q_g}{q_s} = \frac{10^4 \text{ J}}{5 \times 10^4 \frac{\text{J}}{\text{g}}} = 0.2 \text{ g}$. (d) Snaga motora može da se odredi kao rad po ciklusu pomnožen brojem ciklusa u sekundi. $P = 2 \times 10^3 \text{ J} \frac{25}{1 \text{ s}} = 50 \text{ kW}$. (e) U sekundi ima 25 ciklusa, pa je masa goriva koja se sagori u sekundi $m_1 = 25 \cdot 0.2 \text{ g} = 5 \text{ g}$. U satu se sagori 3600 puta više.

Termodinamički ciklusi

Motor sa unutrašnjim sagorevanjem

Mnoge mašine u našoj okolini su termodinamičke mašine. Uzmi-mo za primer motor sa unutrašnjim sagorevanjem. Na slici je prikazan jedan cilindar motora u kome se događa sagorevanje goriva. Energija dobijena sagorevanjem pokreće klip, čije se kretanje dalje prenosi na pogon točkova.



Slika 5.2: Shematski prikaz rada cilindra motora sa unutrašnjim sagorevanjem.

Osnovni procesi u motoru su:

- U cilindar ulazi smeša pare goriva i vazduha. Povećavanje količine gasa prouzrokuje pokretanje klipa, i prostor za gas se širi. Neka je najmanja zapremina iznad klipa V , a najveća rV . Veličina r naziva se faktor kompresije. U današnjim benzinskim motorima je između 8 i 10. Kada se dostigne najveća zapremina, ventil kroz koji ulazi smeša gasova se zatvara.
- Klip se vraća, sabijajući gas. Zidovi cilindra motora su dosta dobri toplotni izolatori, pa se može uzeti da je ovo sabijanje adijabatsko.

- (c) Kada se dostigne minimalna zapremina, tada je pritisak gasa najveći, kao i temperatura, na svećici se pali varnica koja zapali celu smešu gasa, koji zapravo eksplodira.
- (d) Posle eksplozije gas se brzo širi do maksimalne zapremine i vrši rad.
- (e) U povratku klipa, otvara se ventil za ispuštanje proizvoda sagorevanja. Ceo postupak kreće iznova.

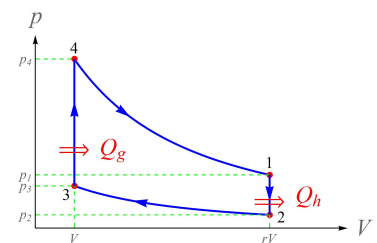
Iako vrlo uprošćen, ovo je opis realnog procesa koji se odvija u klipnom motoru. Uz nekoliko aproksimacija može se grubo izračunati koeficijent korisnog dejstva benzinskog motora.

Otov ciklus

- Cilindar stalno menja gas koji se nalazi u njemu. Ali ako se procesi (a) i (e) posmatraju kao jedan, može se situacija pojednostaviti. Na početku u cilindar ulazi hladan gas, a na kraju izlazi vreo. Neka količina vrelog gasa se zameni približno istom količinom hladne smeše. Efektivno, ovo je isto kao da se vreo gas ohladio i gas je predao toplotu hladnjaku. Ako gledamo pun cilindar novog gasa, kao da se sve događalo pri konstantnoj zapremini. Treba imati u vidu da se hemijski sastav gasa menja pri sagorevanju, tako da i ako je količina gasa skoro ista, to nije isti gas, ali aproksimacija je dovoljno dobra za dalju analizu.
- Sabijanje gasa se odvija brzo i u toplotno izolovanom sudu, tako da možemo da aproksimiramo ovaj proces adijabatskim.
- Pri dostizanju najmanje zapremine, pali se varnica i gas eksplodira, i time oslobađa veliku količinu toplote. Ovaj proces se može aproksimirati procesom u kojem je zapremina konstantna, i u kojem se gasu dovodi toplota (potiče od eksplozije). Eksplozija je kratka, brzo oslobađa energiju, i ako posmatramo trenutak neposredno pre i neposredno posle eksplozije, zapremina se nije promenila, klip je na istom mestu.
- Posle eksplozije gas se brzo širi, u toplotno izolovanom sudu, pa se može reći da se širi adijabatski.

Konačno, realan proces koji se odvija u cilindru motora je aproksimiran termodinamičkim ciklusom koji se sastoji od dve adijabate i dve izohore. Ovaj ciklus se naziva Otov ciklus, po konstruktoru benzinskog motora. Otov ciklus je prikazan na slici 5.3.

Od stanja 1 do stanja 2 se vrši izohorsko hlađenje, što odgovara ispuštanju vrelh gasova i ubrizgavanju hladne smeše (proces (a) i (e) sa slike 5.2). Zatim se gas sabija, adijabatski, do stanja 3. Pri maksimalnoj kompresiji gasu se izohorski dovodi toplota, što odgovara vrlo kratkom vremenskom periodu oko eksplozije gasa. Zatim se gas adijabatski širi. Na kraju, još jedna aproksimacija, pretpostavićemo da je gas idealan.



Slika 5.3: Otov ciklus. Aproksimativni ciklus koji dobro opisuje rad benzinskog motora.

Toplota se razmenjuje samo pri izohorskim procesima.

$$Q_g = \nu C_V (T_4 - T_3),$$

$$Q_h = \nu C_V (T_2 - T_1).$$

Pri izohorskoj kompresiji, pritisak se povećava, pošto je zapremina konstantna, to znači (iz jednačine stanja idealnog gasa) da se gas zagreva. Konačna temperatura u ovoj kompresiji je veća od početne ($T_4 > T_3$), što znači da je $Q_g > 0$. Analogno, pri izohorskoj dekompresiji gas se hladi, pa je samim tim $Q_h < 0$.

Koeficijent korisnog dejstva je:

$$\eta = \frac{Q_g + Q_h}{Q_g} = \frac{T_4 - T_3 + T_2 - T_1}{T_4 - T_3}. \quad (5.2)$$

Pošto su procesi 4-1 i 2-3 adijabatski, onda je:

$$T_4 V^{\gamma-1} = T_1 (rV)^{\gamma-1}, T_1 = T_4 \frac{1}{r^{\gamma-1}},$$

$$T_2 (rV)^{\gamma-1} = T_3 V^{\gamma-1}, T_2 = T_3 \frac{1}{r^{\gamma-1}}.$$

Tada je:

$$\eta = \frac{T_4 - T_3 + \frac{1}{r^{\gamma-1}}(T_3 - T_4)}{T_4 - T_3}, \quad (5.3)$$

odnosno:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}. \quad (5.4)$$

Za faktor kompresije $r = 8$, i za $\gamma = 1.4$, dobija se da je $\eta = 56\%$.

Dizelov ciklus

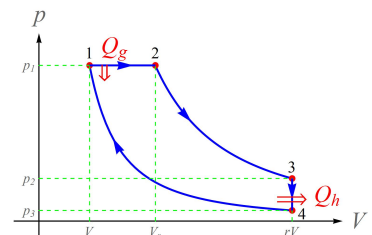
Druga vrsta motora sa unutrašnjim sagorevanjem su dizel motori, nazvani po konstruktoru. Umesto benzina koriste naftu. Nemaju svećice za paljenje goriva, već se gorivo spontano pali na visokoj temperaturi. Shematski prikaz cilindra 5.2 može da se iskoristi i za dizelov motor, samo treba imati u vidu da se gorivo spontano pali. Faktor kompresije je od 15 do 20.

Preskoćićemo detalje i zadržaćemo se samo na osnovnoj razlici između ove dve vrste motora. U cilindar se ne ubrizgava smeša goriva, već u početku samo vazduh. Pred sam kraj kompresije se ubrizgava gorivo, na skoro konstantnom pritisku, koje se odmah potom spontano zapali. Ostatak procesa je skoro isti kao kod benzinskog motora.

Što se ekvivalentnog termodinamičkog ciklusa tiče, samo je jedan izohorski proces zamenjen izobarskim kao na slici 5.4. Ubacivanje novog vazduha i izbacivanje proizvoda sagorevanja je aproksimirano izohorskim hlađenjem, 3-4, kao i kod benzinskog motora. Sagorevanje goriva i predavanje toplote gasu je aproksimirano izobarskim procesom 1-2.

Dobijeni rezultat ukazuje na to da ako bi bilo moguće postići veći faktor kompresije, da bi koeficijent korisnog dejstva bio veći. Međutim, sa većom kompresijom bila bi i veća temperatura gasa pred paljenje, pa bi to moglo da izazove nekontrolisanu eksploziju, što bi dovelo do prilično nepravilnog rada motora. Zato postoji gornja granica ovog parametra.

Pored navedenih aproksimacija, mešavina goriva i vazduha nije idealan gas. Postoji trenje između klipa i zidova cilindra, zidovi nisu idealni toplotni izolatori. Ni u najboljem slučaju ne sagori sva smeša gasova, odnosno svo gorivo u smeši. Zbog toga u izduvnim gasovima ima, pored vode i ugljen-dioksida i ugljen monoksida i nesagorelih sastojaka goriva, a i olova ako benzin nije bezolovni. Kada se izmeri koeficijent korisnog dejstva realnog motora, on je kod najboljih motora oko 35%.



Slika 5.4: Dizelov termodinamički ciklus.

Hladnjak

Važan primer toplotne mašine je hladnjak. Hladnjak je mašina koja od hladnijeg toplotnog rezervoara uzima toplotu i predaje toplotu toplijoj okolini. Da bi ovo bilo moguće potrebno je izvršiti rad nad radnim telom.

Ako se i ovom prilikom ograničimo na slučaj u kojem se tokom nekoliko ciklusa ne menja temperatura hladnijeg i toplijeg rezervoara (okoline), onda je jedini deo sistema koji menja stanja tokom ciklusa, radno telo.

Količina toplote koju radno telo primi od hladnjaka je pozitivna, toplota koju radno telo preda okolini je negativna, i rad koji se vrši nad radnim telom je negativan. Kao i za svaki ciklični proces promena unutrašnje energije radnog tela je jednaka nuli, pa je po prvom zakonu termodinamike:

$$Q_g + Q_h - A = 0.$$

Dobar hladnjak će za najmanji mogući rad uzimati što je moguće veću količinu toplote od hladnijeg dela. Dakle kvalitet hladnjaka će dobro pokazivati veličina koja je količnik količine toplote uzete od hladnijeg dela i rada uloženog za to:

$$\kappa = \frac{Q_h}{|A|} = \frac{Q_h}{|Q_g| - Q_h}. \quad (5.5)$$

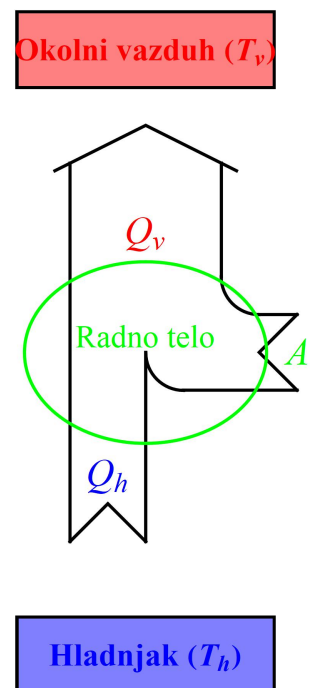
Zanimljivo je i šta je radno telo u standardnim kućnim frižiderima. Na slici 5.6 je shematski prikaz radnog tela frižidera. Deo sistema (cevi) se nalazi u frižideru, a drugi deo cevi se nalazi na spoljnoj strani frižidera. U cevima je fluid. Kada fluid stigne u kompresor (K na slici) povećava mu se pritisak, zagreje se dovoljno da mu temperatura bude veća od temperature okoline, pa toplotu može da preda okolini (vazduhu u prostoriji). Zatim fluid dolazi u ekspanzor (E na slici), gde se naglo širi, praktično adijabatski, i zbog toga se ohladi dovoljno da bude hladniji od unutrašnjosti frižidera, gde kada uđe može da primi toplotu, i ide ponovo ka kompresoru. Posebno je zanimljivo da je radni fluid smeša tečnosti i gasa. Zbog toga može mnogo više toplote da razmeni nego da je u jednom agregatnom stanju, pošto se stalno događa i fazni prelaz. Prilikom kompresije fluid se delimično kondenzuje, dok pri ekspanziji delimično ispari.

Formulacije drugog zakona termodinamike

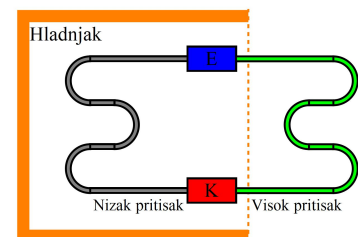
Iz definicije koeficijenta korisnog dejstva, jednačina 5.1, se vidi da je njegova najveća vrednost 1, za slučaj da se kompletna toplota pretvori u rad, odnosno mehaničku energiju. Kasnije je napomenuto da takvih mašina nema. Uzimajući u obzir šaljivu definiciju ovog zakona, to onda znači ne samo da se ne dešava, nego i da je nemoguće da se desi, što predstavlja drugi zakon termodinamike.

Ima nekoliko važnih formulacija drugog zakona. Prva koju ćemo analizirati se zove Kelvin–Planckova formulacija.

Termin *hladnjak* se u ovom tekstu koristi dvojako. Prvo, kao toplotni rezervoar toplotne mašine na nižoj temperaturi, kome radno telo predaje toplotu. Pored toga, hladnjak je i toplotna mašina koja hladi sistem, kao na primer frižider, zamrzivač ili klima uređaj. Tako, na primer, može se reći da toplotna mašina, hladnjak, ima svoj hladniji toplotni rezervoar, hladnjak. Ipak, iz konteksta bi trebalo da bude jasno na koji se hladnjak misli.



Slika 5.5: Shematski prikaz rada hladnjaka.



Slika 5.6: Shematski prikaz mehanizma hlađenja. K je kompresor, dok je E ekspanzor.

Nije moguće da bilo koji sistem vrši ciklus u kome bi sva toplota apsorbirana od toplotnog rezervoara, na fiksiranoj temperaturi, bila potrošena na mehanički rad, a da se sistem vrati u početno stanje.

Ako se iskoristi definicija koeficijenta korisnog dejstva, ekvivalentna definicija bi bila da ne postoji idealna toplotna mašina, odnosno $\eta < 1$.

U telu koje se kreće molekuli se kreću tako što je na njihovo nasumično kretanje supeponirano koordinisano kretanje svakog molekula u smeru kretanja tela. Kinetička energija tog koordinisanog kretanja je kinetička energija tela koje se kreće, ili makroskopska kinetička energija, kako smo je ranije definisali.

Kinetička energija nasumičnog kretanja molekula i potencijalna energija interakcije molekula u zbiru daju unutrašnju energiju tela (sistema).

U svetlu ovih komentara formulacija drugog zakona termodinamike može da bude da je sasvim moguće da se kompletna energija koordinisanog kretanja pretvori u energiju nasumičnog kretanja molekula, ali obrnuto je moguće samo delimično.

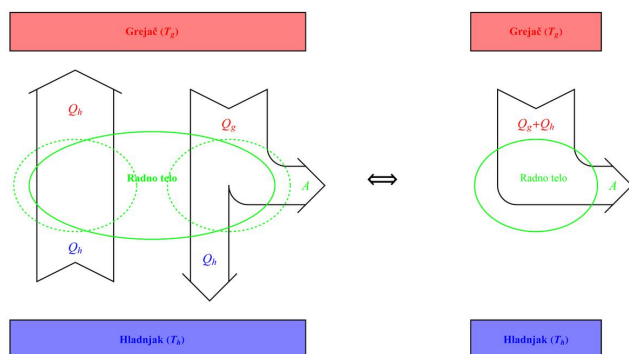
Važno je naglasiti da drugi zakon nije izveden iz prvog, već je nezavisni prirodni zakon. Prvi zakon zabranjuje da se energija stvori ili uništi, a drugi zakon ograničava dostupnost energije i načine na koje se ona može transformisati.

Druga važna formulacija je Klauzijusova formulacija drugog zakona.

Nije moguće da jedini rezultat nekog procesa bude prenos toplote sa hladnijeg na topliji rezervoar.

Ili, korišćenjem definicije koeficijenta korisnog dejstva hladnjaka: ne postoji idealni hladnjak.

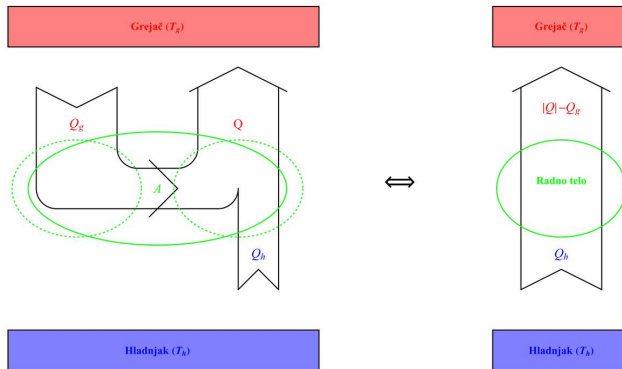
Ove dve formulacije se naizgled odnose na različite stvari. One se pojedinačno ne mogu dokazati. Ali, može se pokazati da su ekvivalentne, ako je jedna tačna, onda je sigurno i druga tačna.



Slika 5.7: Shematski prikaz dokaza ekvivalencije Kelvin-Planckove (KP) i Klauzijusove (K) formulacije drugog zakona termodinamike (Ne K $\Rightarrow$ Ne KP).

Za dokaz je podesno upotrebiti standardni logički metod, pretpostavljanja suprotnog. Neka Klauzijusova formulacija nije tačna. Onda se spoji idealni hladnjak sa običnom toplotnom mašinom, kao što je prikazano na slici 5.7. Jedini uslov koji se nameće toplotnoj mašini je da hladnijem rezervoaru preda istu količinu toplote, Q_h , koliku je

hladnjak apsorbirao. Lako se vidi da je zbirni učinak ove kompozitne mašine pretvaranje u rad kompletne količine toplote, $Q_g - |Q_h|$, koja je primljena od toplijeg rezervoara. Dakle, ako Klauzijusova formulacija nije tačna, onda ni Kelvin–Plankova nije tačna.



Slika 5.8: Shematski prikaz dokaza ekvivalencije Kelvin-Plankove (KP) i Klauzijusove (K) formulacije drugog zakona termodinamike (Ne KP $\Rightarrow$ Ne K).

Ako Kelvin–Plankova formulacija nije dobra, onda na idealnu toplotnu mašinu dodamo običan hladnjak. Jedino se podesi da se kompletan rad toplotne mašine iskoristi za hladnjak. Zbirni učinak je da se kompletna toplota, Q_h , dobijena od hladnijeg rezervoara preda toplijem rezervoaru, $|Q| - Q_g = Q_h$. Dakle, onda ni Klauzijusova formulacija nije tačna.

Pokazano je da su ove dve formulacije ekvivalentne. Ako nema idealnog hladnjaka onda nema ni idealne toplotne mašine, i obrnuto.

Posledica drugog zakona je da je pretvaranje rada u toplotu ireverzibilan proces. Obrnut proces može da bude samo delimično reverzibilan.

Karnoov ciklus

Karnoova mašina

Po drugom zakonu termodinamike ne postoji idealna toplotna mašina, odnosno $\eta < 1$. Postavlja se pitanje, za fiksirane temperature grejača i hladnjaka kakav ciklus treba napraviti da bi koeficijent korisnog dejstva bio najveći.

Ovim pitanjem se prvi, uspešno, bavio Sadi Karno. On je analizirao termodinamičke procese, i razmišljao o tome kako da smanji gubitke energije, što je moguće više. Potrebno je što više eliminisati ireverzibilne procese u kojima se gubi energija.

Svrha procesa u termodinamičkom ciklusu je dvojaka. U nekim procesima radno telo razmenjuje toplotu sa okolinom, dok je u drugim svrha da radno telo prevashodno vrši rad.

Podsećanja radi:

- Pretvaranje rada u toplotu je ireverzibilan proces;
- Pretvaranje toplote u rad je samo delimično reverzibilno.

Smanjivanje gubitaka energije je ekvivalentno smanjenju broja ireverzibilnih procesa. Idealna mašina bi potpuno izbegla ireverzibilne

Za sada izgleda da je drugi zakon termodinamike moguće samo opisno definisati, za razliku od prvog zakona koji ima vrlo kompaktnu i jednostavnu matematičku formu. I drugi zakon je moguće, još kompaktnije matematički zapisati, ali taj zapis je daleko van okvira ovog kursa (spada u oblast matematike koja se zove diferencijalna geometrija). Prepričana formula bi mogla da izgleda ovako: U okolini svakog termodinamičkog stanja postoje stanja kojima nije moguće prići proizvoljno blizu adijabatskim procesom. Ova formulacija se zove Karateodorijeva formulacija, po grčkom matematičaru iz 19. i 20. veka.

procesu.

Prilikom razmene toplote sa okolinom, ukoliko postoji razlika u temperaturama radnog tela i toplotnog rezervoara, toplota se provodi od toplijeg ka hladnijem sistemu. Prilikom provođenja toplote deo toplote (energije) se neminovno gubi. Ako želimo da smanjimo gubitke onda prilikom razmene toplote ne bi trebalo da bude razlike u temperaturama toplotnih rezervoara i radnog tela. Karno je zaključio da je to moguće samo ako su procesi razmene toplote izotermni.

Tokom procesa u kojima radno telo menja temperaturu i vrši rad, ne sme da bude razmene toplote sa rezervoarima. To je moguće samo ako su ovakvi procesi adijabatski.

Konačno, najmanji gubici energije su u ciklusima koji se sastoje samo od izoterma i adijabata. Pored toga, radno telo je u svakom trenutku u stanju mehaničke i termodinamičke ravnoteže.

Svaka toplotna mašina razmenjuje toplotu sa rezervoarima i vrši rad, ali s obzirom na potpuno izbegavanje gubitaka energije, Karno-ova mašina to radi nejefikasnije.

U najjednostavnijem slučaju Karnoov ciklus se sastoji od dve reverzibilne izoterme i dve reverzibilne adijabate. Za dalju analizu uzećemo da je radno telo idealan gas.

Na višoj temperaturi, T_g , radno telo prima toplotu od grejača, Q_g , tokom izoternskog procesa. Zatim se adijabatski širi, vrši rad, hladi se, i potom pri izoternskom procesu, na temperaturi T_h , predaje hladnjaku količinu toplote Q_h . Još jednom vredi napomenuti da se razmene toplote izvide u izoternskim procesima, kada su temperature radnog tela jednake temperaturi grejača i hladnjaka, respektivno. Zato su i označene sa T_g i T_h . Konačno, posle hlađenja gas se adijabatski sabija, do početne zapremine, V_1 .

Koeficijent korisnog dejstva je određen količinama toplote koje se razmenjuju sa toplotnim mašinama:

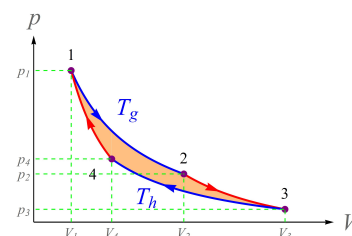
- 1-2: $T_g = \text{const} \Rightarrow U = \text{const} \Rightarrow \Delta U_{12} = 0 \Rightarrow Q_g = A_{12}$. $A_{12} = \nu RT_g \ln \frac{V_2}{V_1}$.
- 2-3: $Q_{23} = 0$.
- 3-4: Slično kao i u prvom izoternskom procesu, ovde je količina predate toplote jednaka radu izvršenom nad radnim telom. $Q_h = \nu RT_h \ln \frac{V_4}{V_3} = -\nu RT_h \ln \frac{V_3}{V_4}$.
- 4-1: $Q_{41} = 0$.

Koeficijent korisnog dejstva je:

$$\eta = 1 - \frac{\nu RT_h \ln \frac{V_3}{V_4}}{\nu RT_g \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Kada se iskoriste adijabate, uz napomenu da je $T_1 = T_2 = T_g$ i $T_3 = T_4 = T_h$, dobija se:

$$\begin{aligned} T_g V_2^{\gamma-1} &= T_h V_3^{\gamma-1}, \\ T_h V_4^{\gamma-1} &= T_g V_1^{\gamma-1}. \end{aligned}$$



Slika 5.9: Karnoov ciklus.

Deljenjem ove dve jednačine se dobija:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1},$$

odnosno:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Zamenom u izraz za koeficijent korisnog dejstva, skrate se svi članovi koji sadrže zapremine, i konačno se dobija:

$$\eta = 1 - \frac{T_h}{T_g}. \quad (5.6)$$

Koeficijent korisnog dejstva za Karnoov ciklus, koji vrši idealan gas, zavisi samo od odnosa temperatura grejača i hladnjaka. Sa druge strane se vidi da rezultat uopšte ne zavisi od vrste idealnog gasa.

Još jedna zanimljiva činjenica se može videti u Karnoovom ciklusu, a njen značaj će biti otkriven kasnije.

- 1-2: $\frac{Q_g}{T_g} = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1},$
- 3-4: $\frac{Q_h}{T_h} = -\nu R \ln \frac{V_3}{V_4}.$

Pokazano je da su odnosi zapremina isti, tako da je:

$$\frac{Q_g}{T_g} = -\frac{Q_h}{T_h}, \text{ odnosno, } \frac{Q_g}{T_g} = \frac{|Q_h|}{T_h}. \quad (5.7)$$

Veličina $\frac{Q}{T}$ se naziva redukovana toplota. Dakle, u Karnoovom ciklusu redukovana toplota se ne menja.

Karnoov hladnjak

S obzirom da je svaki proces u Karnoovom ciklusu reverzibilan, onda je i ceo ciklus takav, pa se može okrenuti smer obilaska ciklusa. Tako se dobija Karnoov hladnjak.

Kao što je rečeno ranije, efikasnost hladnjaka meri se koeficijentom (jednačina 5.5):

$$\kappa = \frac{Q_h}{|Q_g| - Q_h} = \frac{\frac{Q_h}{|Q_g|}}{1 - \frac{Q_h}{|Q_g|}}.$$

Koristeći izraz za redukovane toplote, koji važi i u slučaju hladnjaka, dobija se:

$$\kappa = \frac{T_h}{T_g - T_h}. \quad (5.8)$$

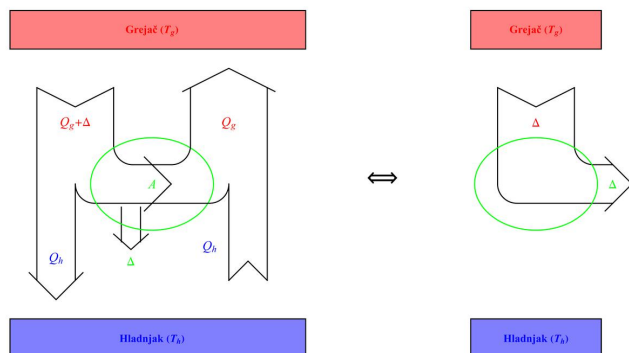
Za malu razliku temperatura grejača i hladnjaka koeficijent κ može da bude vrlo veliki. Sa malim radom može da se izvuče velika količina toplote iz sistema. Kako raste razlika, što je zapravo ekvivalentno iskazu da što više želimo da ohladimo sistem, potrebno je uložiti veći rad.

Karnoov ciklus i drugi zakon termodinamike

S obzirom na osnovnu ideju Karnoovog ciklusa, izgleda da je on najefikasniji ciklus. Tako da može da se kaže:

Za fiksirane temperature grejača i hladnjaka ni jedna mašina ne može da bude efikasnija od Karnoove.

Ispostavlja se da je ovo još jedna formulacija drugog zakona termodinamike, koja je potpuno ekvivalentna prethodnim formulacijama.



Slika 5.10: Shematski prikaz dokaza da je efikasnija mašina od Karnoove u suprotnosti sa drugim zakonom termodinamike.

Da bi se pokazala ekvivalentnost iskaza, opet treba pretpostaviti suprotno. Neka postoji mašina koja je efikasnija od Karnoove. Veća efikasnost se može postići ili ako radno telo uzima veću količinu toplote od grejača od Karnoove, ili predaje manju količinu toplote hladnjaku nego Karnoova. Neka uzima više toplote, $Q_g + \Delta$, gde je Q_g količina koju uzima Karnoova mašina. Neka sav dodatak ode na dodatni rad, $A + \Delta$ (gde je A rad koji izvrši Karnoova mašina), i neka ova mašina predaje istu količinu toplote hladnjaku, kao i Karnoova mašina. Na ovu mašinu nadovežemo Karnoov hladnjak, koji prima Q_h od hladnijeg rezervoara i predaje Q_g okolini, uz rad koji je jednak A . Ukupan efekat ove kompozitne mašine je da radno telo uzima neku količinu toplote od grejača i kompletno je pretvara u rad, što je nemoguće po drugom zakonu termodinamike. Dakle, ako postoji efikasnija mašina od Karnoove, onda ne važi drugi zakon termodinamike. Odnosno, iskaz da je Karnoova mašina najefikasnija je još jedna formulacija drugog zakona.

Na sličan način može da se tvrdi i sledeće:

Ne postoji hladnjak koji radi sa istim rezervoarima kao i Karnoov, koji bi bio efikasniji od Karnoovog hladnjaka.

I ovo je još jedna od formulacija drugog zakona.

Zanimljivo je i diskutabilno da je efikasnost Karnoove mašine vezana za formulaciju drugog zakona. Drugi zakon je opšti prirodni princip, a izraz za koeficijent korisnog dejstva je izveden za idealan gas. Kako jedan specijalan slučaj može da bude ekvivalentan opštem pravilu?

Ispostavlja se, a biće i pokazano uskoro, da izraz za koeficijent korisnog dejstva 5.6 ne zavisi uopšte od radnog tela. Ne samo od vrste gasa, već ne mora da bude gas uopšte.

Primer 5.2

Iz izraza za koeficijent korisnog dejstva Karnoove mašine se vidi da sve zavisi od odnosa $\frac{T_h}{T_g}$, što je ovaj količnik manji, to je koeficijent veći. Ako ciklus u parnoj turbini u termoelektrani posmatramo približno kao Karnoov, onda možemo da procenimo koeficijent korisnog dejstva. Radni pritisak je oko 235 atmosfera, temperatura grejača je oko $t_g \approx 500^\circ\text{C}$, dok za temperaturu reke, u većem delu godine možemo uzeti $t_h \approx 10^\circ\text{C}$. Za ove temperature dobija se $\eta \approx 63\%$.

Kelvinova skala

Karnoova mašina može da nam posluži da dodefinišemo Kelvinovu skalu za temperaturu.

Iz jednakosti redukovanih toplota sledi:

$$\frac{T_h}{T_g} = \frac{|Q_h|}{Q_g}.$$

Ovaj odnos je potpuno nezavisan od toga šta je radno telo, kao što je nagovešteno, a biće pokazano kasnije. Ako imamo jednu dobro definisanu temperaturu, na primer temperaturu trojne tačke vode, onda uz pomoć Karnoove mašine možemo definisati (odrediti) bilo koju drugu, potpuno nezavisno od vrste radnog tela. Dakle, zaključujemo da je Kelvinova skala zaista apsolutna, nezavisna od sistema kojem merimo i sistema kojim merimo temperaturu.

Entropija

Mnogi procesi u prirodi teku tako da se povećava nered u sistemu. Ireverzibilni protok toplote povećava nered, pošto su tokom provođenja molekuli uređeni tako da u sistemu postoje oblasti u kojima je temperatura u okviru nekog intervala, i te oblasti se nižu od toplijeg do hladnijeg rezervoara. Kada dođe do uspostavljanja termodinamičke ravnoteže, gubi se takvo uređenje. Ceo sistem je jedna oblast.

Slobodna ekspanzija gasa povećava nered zato što molekuli imaju više mogućih položaja u prostoru, nego što su imali pre ekspanzije.

Uvedimo fizičku veličinu koja je mera nereda, ili neuređenosti sistema, ta fizička veličina je entropija.

Entropija daje kvantitativnu meru nereda.

Posmatrajmo izotermску ekspanziju idealnog gasa za infinitezimalno malu promenu zapremine. Promena unutrašnje energije je jednaka nuli $dU = 0$. Tada je:

$$dQ = dA = pdV = \frac{\nu RT}{V}dV,$$

odnosno:

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{\nu R} \frac{dQ}{T}.$$

Prilikom širenja se očigledno povećava nered, molekuli se kreću u većoj zapremini i imaju veći broj mogućih položaja. Sa druge strane, povećanje neuređenosti prilikom ekspanzije zavisi i od toga kolika

je početna zapremina gasa. Što je zapremina gasa veća, to će mala promena zapremine manje povećati nered u sistemu. Može da se zaključi da je veličina $\frac{dV}{V}$ mera povećanja neuređenosti:

$$\frac{dV}{V} \propto \frac{dQ}{T}.$$

Za infinitezimalni reverzibilni proces na temperaturi T , promena entropije sistema je data sa:

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (5.9)$$

Iz definicije sledi da je promena entropije sistema u nekom procesu:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{Q}{T}. \quad (5.10)$$

Definicija promene entropije za reverzibilne procese daje neke veoma važne informacije. Neka imamo dva sistema na različitim temperaturama, i dovodimo istu količinu toplote za oba sistema. Promena entropije ova dva sistema neće biti ista. Veća promena entropije će biti u sistemu koji je na nižoj temperaturi. To ukazuje da je na višoj temperaturi veća neuređenost sistema (ovo će biti posebno analizirano kasnije), pa dovedena energija ne može mnogo da je promeni. Na niskoj temperaturi, neuređenost je manja, pa dovedena toplota može više da promeni entropiju sistema. Sa druge strane, iz definicije se vidi da je $\frac{Q}{T}$ mera promene entropije, odnosno promene neuređenosti sistema.

Primer 5.3

Kilogram leda na temperaturi 0°C se otopi, tako da se dobije voda na 0°C . Ako je topljenje leda reverzibilan proces, naći promenu entropije. Latentna toplota topljenja leda je $q_t = 3.34 \times 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$. Temperatura se ne menja, onda je:

$$Q = mq_t,$$

iz definicije promene entropije je:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{mq_t}{T} = 1.22 \times 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Bilo koji reverzibilan proces može da se podeli na infinitezimalne reverzibilne korake, takve da u svakom koraku sistem razmenuje toplotu sa okolinom na nekoj temperaturi T . Tada je:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \quad (5.11)$$

Svaki korak je reverzibilan proces, tako da i gornja formula važi samo za reverzibilne procese.

Za idealan gas promena entropije u proizvoljnom procesu je:

$$\begin{aligned} dQ &= \nu C_v dT + p dV \\ dS &= \nu C_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV = \nu C_v \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V}. \end{aligned}$$

Ako bismo našli konačnu promenu entropije sistema, vidi se da rezultat zavisi samo od termodinamičkih parametara početnog i krajnjeg stanja sistema, odnosno od entropija početnog i krajnjeg stanja sistema:

$$\Delta S = \int_1^2 dS = S_2 - S_1,$$

što znači da je entropija funkcija stanja.

Izraz za promenu entropije može da se primeni i na ireverzibilne procese, upravo zbog toga što je entropija funkcija stanja. Neka sistem pređe iz stanja 1 u stanje 2 nekim ireverzibilnim procesom. Ako postoji konačan niz reverzibilnih procesa kojim se iz istog početnog stanja (1) može stići u isto konačno stanje (2), onda je promena entropije za niz reverzibilnih procesa ista kao i za ireverzibilan proces.

Ima smisla govoriti i o entropiji nekog termodinamičkog stanja, ali nema dobrog recepta kako bi se ona izračunala. Tek pri promeni stanja i razmeni toplote sa okolinom može se izračunati promena entropije za neki proces, nešto slično kao sa unutrašnjom energijom.

Primer 5.4

Kilogram vode je zagrejan od 0°C do 100°C . Izračunati promenu entropije vode. Specifična toplota vode je $c = 4190 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$.

$$dQ = mcdT, \quad dS = \int_1^2 \frac{mcdT}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1} = 1.31 \times 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

U primeru možete da vidite da je promena entropije pri topljenju leda na konstantnoj temperaturi skoro ista kao i promena entropije pri zagrevanju iste mase vode za 100K .

Još jedno važno zapažanje, kolika je promena entropije za reverzibilni adijabatski proces?

$$dQ = 0 \Rightarrow dS = 0.$$

Dakle, reverzibilni adijabatski proces je izoentropijski.

Primer 5.5

Pogledajte ponovo slobodnu ekspanziju idealnog gasa. Kolika je promena entropije gasa? Videli ste da je za idealan gas promena unutrašnje energije jednaka nuli. Gas ne vrši rad, tako da je i količina toplote razmenjena u ovom procesu jednaka nuli. Ali, gas se posle ekspanzije nalazi u većoj zapremini, biće veća neuređenost nego u manjoj zapremini, tako da promena entropije ne može da bude jednaka nuli. Sistem je izolovan, nema razmene energije sa okolinom, tako da je proces po definiciji adijabatski. Ali nije reverzibilan, tako da nije izoentropijski. Međutim, promena entropije pri slobodnoj ekspanziji ipak može da se izračuna. Neka je početno stanje gasa takvo da su mu parametri (n, p, V, T) . Pri slobodnoj ekspanziji ostaje ista količina gasa, temperatura se ne menja. Gas se proširi η puta ($V_2/V_1 = \eta$). Iz jednačine stanja idealnog gasa se vidi da se u tom slučaju pritisak smanji η puta. Dakle, konačno stanje posle ekspanzije je opisano parametrima $(n, p/\eta, \eta V, T)$. Ista ova dva stanja može da poveže reverzibilni izotermni proces.

Obratite pažnju na to koliko je proces slobodne ekspanzije različit od reverzibilnog izotermnog, iako im je promena entropije ista:

- Slobodna ekspanzija:
 - Ireverzibilan proces;
 - Adijabatski proces, $Q = 0$;
 - $\Delta U = 0$;
 - Sistem ne vrši rad, $A = 0$.
- Reverzibilni izotermni proces:
 - Reverzibilan proces;
 - Sistem razmenjuje toplotu sa okolinom $Q \neq 0$;
 - $\Delta U = 0$;
 - Sistem vrši rad $A \neq 0$.

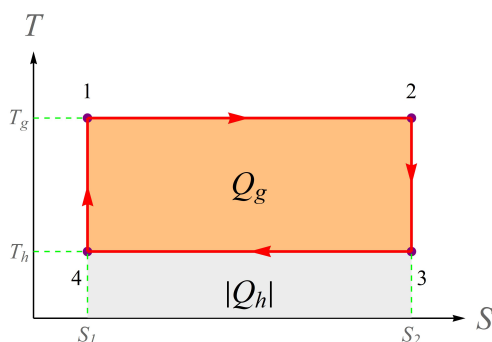
Promena entropije je, s obzirom da se temperatura ne menja:

$$\Delta S = \int_1^2 \nu R \frac{dV}{V} = \nu R \ln \frac{\eta V}{V} = \nu R \ln \eta.$$

S obzirom da je entropija funkcija stanja, rezultat će biti isti i za ireverzibilnu slobodnu ekspanziju.

Karnoov ciklus i entropija

Uvođenjem entropije, neki iskazi o Karnoovom ciklusu se mogu pokazati i pojasniti.



Slika 5.11: Karnoov ciklus u TS -dijagramu.

Svi procesi u Karnoovom ciklusu su reverzibilni. Reverzibilni adijabatski proces je izoentropijski. Dakle, svaki adijabatski proces se odvija pri konstantnoj entropiji, S_1 i S_2 . Ako bi se Karnoov ciklus predstavio na TS -dijagramu imao bi vrlo jednostavan oblik, kao što je prikazano na slici 5.11.

S obzirom da je po definiciji promene entropije za reverzibilne procese $dQ = TdS$, onda je količina toplote razmenjena sa rezervoarima u nekom procesu prikazanom na TS -dijagramu jednaka površini ispod krive. Tako je za Karnoov ciklus količina toplote koju radno telo apsorbira, Q_g jednaka površini ispod izoterme T_g (smeđa i siva površina). Količina toplote predata hladnjaku, Q_h , je jednaka površini ispod izoterme T_h (siva površina). Razlika ove dve površine (smeđa površina) je jednaka ukupnom radu koji se izvrši po jednom ciklusu.

Količine toplote se lako izračunaju u ovom slučaju kao površine:

$$Q_g = \Delta S T_g, \quad (5.12)$$

$$Q_h = \Delta S T_h. \quad (5.13)$$

Koeficijent korisnog dejstva je:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_h|}{Q_g} = 1 - \frac{T_h}{T_g}. \quad (5.14)$$

Prikaz Karnoovog ciklusa u TS -dijagramu pokazuje da η ne zavisi od toga šta je radno telo.

- Adijabatski proces je po definiciji proces u kome nema razmene toplote, $dQ = 0$.

- Revezibilni adijabatski proces, $dQ = TdS = 0$, je izoentropijski, $S = \text{const.}$
- Izotermni proces je proces za koji je $T = \text{const.}$

Samo ove činjenice su bile potrebne da bi se nacrtao Karnoov ciklus, a ni jedna od njih ne zavisi od toga šta je radno telo. Dakle dobijeni izraz za η ne zavisi od vrste radnog tela i zbog toga je i bilo moguće formulisati drugi zakon preko koeficijenta korisnog dejstva Karnoovog ciklusa.

Kada se izjednače izrazi za promenu entropije, 5.12 i 5.13, lako se vidi da su redukovane toplote u Karnoovom ciklusu jednake:

$$\frac{Q_g}{T_g} + \frac{Q_h}{T_h} = 0. \quad (5.15)$$

Pošto je entropija funkcija stanja onda ne čudi što se vidi da je promena entropije radnog tela u ciklusu jednaka nuli.

Entropija i drugi zakon termodinamike

Entropija u cikličnim procesima

Iz jednačine 5.15 sledi da je priraštaj entropije radnog tela usled apsorbovanja toplote od grejača $\Delta S_g = \frac{Q_g}{T_g}$, jednaka po apsolutnoj vredosti umanjuju entropije usled predavanja toplote hladnjaku $\Delta S_h = \frac{Q_h}{T_h}$. Rezultat ne zavisi od toga šta je radno telo. Zbir promena entropije u jednom ciklusu je jednak nuli. To znači da je promena entropije u bilo kom Karnoovom ciklusu jednaka nuli. Pošto je entropija funkcija stanja onda je promena entropije u bilo kom cikličnom procesu jednaka nuli.

- Svaki ireverzibilni ciklus je takav da je promena entropije po ciklusu jednaka nuli.
- Svaka zatvorena petlja može da se aproksimira nizom izoterma i adijabata, a za njih je i pokazano da je $\Delta S = 0$.
- Pri prelazu sistema iz stanja (a) u stanje (b) promena entropije ne zavisi od vrste reverzibilnog procesa:

$$\int_a^b \frac{dQ}{T}.$$

U reverzibilnom ciklusu je promena entropije jednaka nuli, odnosno¹:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0.$$

¹ Simbol $\oint$ predstavlja integral po zatvorenoj konturi.

Ireverzibilni procesi

Za idealizovani reverzibilni proces koji se odvija tako da sistem prolazi kroz kvaziravnotežna stanja, promena entropija sistema i okoline su jednake nuli.

Ali u svakom ireverzibilnom procesu entropija raste. Zbog toga entropija ne može da bude održana veličina. Čak i u izolovanom sistemu, prilikom slobodne ekspanzije na primer, entropija može da se poveća, ali nikako ne može spontano da se smanji.

Primer 5.6

Neka je 1kg vode na 100°C pomešan sa 1kg vode temperature 0°C. Kolika je ukupna promena entropije u ovom procesu? Specifična toplota vode je 4190 $\frac{J}{kgK}$.

Proces uključuje ireverzibilni protok toplote. Ali, mogu da se smisle reverzibilni procesi za svaki podsistem za koje je moguće izračunati promenu entropije. Ako pretpostavimo da je sud izolovan i da nema gubitaka energije, onda se unutrašnja energija vode ne menja. Ravnotežna temperatura posle mešanja vode je:

$$T_s = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

Pretpostavimo da postoji reverzibilni proces u kome 1kg vode grejemo od T_2 do T_s , i drugi u kome vodu hladimo od T_1 do T_s . Prilikom grejanja i hlađenja vode na ovim temperaturama pretpostavićemo da joj se zapremina ne menja. Promene entropije za oba ova procesa (grejanje – g, hlađenje – h) su:

$$\begin{aligned}\Delta S_g &= mc \int_{T_2}^{T_s} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_s}{T_2} = 705 \frac{J}{K}, \\ \Delta S_h &= mc \int_{T_1}^{T_s} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_s}{T_1} = -603 \frac{J}{K}; \\ \Delta S &= \Delta S_g + \Delta S_h = 102 \frac{J}{K}.\end{aligned}$$

Prethodni primer vrlo lepo ilustruje nekoliko važnih stvari.

- Hladna voda je primila istu količinu toplote koliku je predala topla voda. Razmenjena energija je ista, ali se hladnoj vodi entropija više promeni nego toploj.
- Dobijeni rezultat pokazuje da će ista količina toplote izazvati veću promenu entropije ako je sistem na nižoj temperaturi.
- Proces uspostavljanja ravnoteže je ireverzibilan, i promena entropije celog sistema (smeše) je pozitivna.
- Na ovom primeru se lako ilustruje nemogućnost spontanog smanjenja entropije. Naime ne može da se desi da se u jednom trenutku u jednom delu suda nađe samo hladnija, a u drugom delu suda samo toplija voda, sa srednjom temperaturom koja bi bila jednaka temperaturi vode pre razdvajanja. Zakon održanja energije tj. prvi zakon to ne zabranjuje, ali to se očigledno ne dešava.

Entropija i drugi zakon

Posmatrajmo neki termodinamički proces. Ako uzmemo u obzir sve sisteme koji učestvuju u procesu, neki kao termodinamički sistemi a neki kao okolina, onda je u svakom procesu moguće samo da ukupna entropija svih učesnika u procesu ostane ista ili da se poveća.

Nije moguć proces u kojem bi se ukupna entropija svih učesnika u procesu smanjivala.

Ovo je još jedna formulacija drugog zakona termodinamike.

Ako imamo dva velika rezervoara vode, na različitim temperaturama, možemo da ih iskoristimo kao toplotne rezervoare i da napravimo neko radno telo, koje će vršiti neki rad. Dakle, deo energije koju imaju ova dva rezervoara možemo da iskoristimo.

Neka se sada voda iz oba rezervoara pomeša. Posle uspostavljanja termodinamičke ravnoteže, energija vode će biti ista kao i zbir energija vode u prethodna dva rezervoara. Ali više ne postoji mogućnost da tu energiju iskoristimo. Mešavina se nikada neće spontano (bez spolja izvršenog rada) razdvojiti na delove različitih temperatura.

Kao što ste videli u primeru, entropija sistema od dva rezervoara je manja od entropije pomešane vode (priraštaj entropije zbog mešanja je pozitivan). Može da se zaključi da sa povećanjem entropije energija postaje manje dostupna.

Od kada je većina stanovništva obrazovana postoje mnogi projekti koji predstavljaju *perpetuum mobile* druge vrste, odnosno savršene mašine koje nemaju gubitke energije. Iako se može ponešto reći o tome koliko konstruktori znaju termodinamiku, ipak ne treba potcenjivati njihovu kreativnost i inteligenciju (bez obzira što su ogroman trud i vreme posvetili nečemu što je po definiciji nemoguće). Ponekad je vrlo teško naći tačno mesto na kojem su napravili grešku, ali jedna od najčešćih grešaka je gubljenje iz vida šta sve učestvuje u procesu, naročito u svojstvu okoline sa kojom je moguća razmena energije.

Mikroskopska interpretacija entropije

Entropija ne može da se definiše za jednu ili nekoliko čestica, ona je mera neuređenosti sistema velikog broja čestica.

Primer 5.7

Da bi se jasnije predstavili pojmovi iz nastavka nije loše da uradite jedan ogled. Za ovaj ogled su vam potrebne kockice za igru (čoveče ne ljuti se, jamb...), list hartije ili direktno da ubacujete rezultate u neki fajl (exel, mathematica, word tabela...). Uzmite nekoliko kockica, bar dve, a ako imate može i do 4. Bacate sve kockice odjednom i beležite zbir brojeva koji ste dobili. Napravite tabelu u kojoj će biti svi mogući zbirovi, i nekako označite zbir koji ste dobili. **Upozorenje:** Ako želite da vidite sve efekte koje statistika predviđa za 4 kockice vam treba bar 1500 bacanja, tako da ogled možete da radite nekoliko dana. Primer tabele:

Zbir	Komb.	Br.	Br. uk.	Br.uk./N	V-ća
2	11		2	2/80	$\frac{1}{36}$
3	12,21		3	3/80	$\frac{1}{18}$
4	13,22,31		7	7/80	$\frac{1}{12}$
...	...	...	...	...	...

Tabela 5.1: Zbir brojeva dobijen bacanjem dve kockice. Kombinacije koje daju isti zbir (Komb.). Prostor za beleženje pojavljivanja (Br.). Ukupan broj pojavljivanja jednog zbira (Br. uk.), broj pojavljivanja/ukupan broj bacanja (Br.uk./N), izračunata verovatnoća za taj zbir (V-ća).

Prethodni primer je podesan za definiciju važnih pojmova. Definišimo makroskopsko stanje sistema. Makroskopsko stanje sistema je određeno fizičkim veličinama (termodinamičkim parametrima) koje možemo da merimo. Stanje je definisano veličinama koje opisuju sistem kao celinu. Uzmimo, na primer, temperaturu. Temperatura je proporcionalna srednjoj kinetičkoj energiji molekula u sistemu. Ali na osnovu srednje kinetičke energije ne možemo da znamo ništa o pojedinačnim kinetičkim energijama svakog molekula.

Zamislite da možemo nekako da numerišemo molekule. Odredimo im zatim brzine i kinetičke energije. Informacija o kinetičkim energijama svih molekula je mikroskopsko stanje sistema. Znamo

tačno za svaki molekul kolika mu je kinetička energija. Važno je uočiti da različiti skupovi kinetičkih energija molekula mogu da daju istu srednju kinetičku energiju. Drugim rečima jedno makroskopsko stanje može da odgovara većem broju mikroskopskih stanja.

Da bi bilo jasnije, vratimo se na primer sa kockicama. Uzmimo četiri, identične, kockice. Neka je zbir koji dobijemo bacanjem ono što možemo da merimo, odnosno zbir nam određuje makroskopsko stanje sistema. Bacimo ih i dobijemo zbir 12. Makroskopsko stanje je 12. Broj 12 smo mogli da dobijemo kao: $1+1+4+6$, $1+1+5+5$, $1+1+6+4$, $1+2+3+6$, $1+2+4+5$, $1+2+5+4$, $1+2+6+3$, $1+3+2+6$... Svaka od ovih kombinacija predstavlja jedno mikroskopsko stanje sistema. Vidimo da isto makroskopsko stanje sistema može da se realizuje na mnogo načina.

Dakle, jedno makroskopsko stanje odgovara manje ili više brojnim kombinacijama mikroskopskih stanja. Verovatnoća da se sistem nađe u nekom makroskopskom stanju zavisi od broja mikroskopskih stanja. Verovatnoća da zbir na 4 kockice bude 12 je oko 9.6%. Međutim, ako znamo samo zbir ne možemo ništa znati o tome koji broj je pokazala koja kockica.

Ipak, postoje i drugačije kombinacije. Na primer za zbir 4, ili 24, svejedno je. Ovi zbirovi su mogući samo ako su sve kockice pokazale isti broj (1 ili 6). Verovatnoća da se to desi je $1/1296$, ali, sa druge strane, mi tačno znamo koji broj je koja kockica pokazala. Imamo samo jedno mikroskopsko stanje koje određuje makroskopsko stanje zbira 4 (ili 24). Pošto znamo sve o rezultatima za svaku kockicu možemo da kažemo da je sistem potpuno uređen. Sa druge strane za stanje zbira 12, ne znamo ništa o pojedinačnim stanjima, i sistem je neuređen.

Ako pogledamo verovatnoće, vidimo da je potpuno uređen sistem vrlo malo verovatan, dok je za neuređen sistem verovatnoća znatno veća. Vidi se jasna veza između neuređenosti sistema i verovatnoće da se sistem nađe u nekom stanju. Mera neuređenosti sistema je entropija, tako da je entropija povezana sa verovatnoćom.

Primer sa kockicama nam je rasvetlio nekoliko važnih stvari:

- Najuređenije makroskopsko stanje je najmanje verovatno. Potpuno uređen sistem je takav da se zna stanje svakog delića sistema. Entropija potpuno uređenog stanja je minimalna, gledajući sva moguća stanja tog sistema.
- Najverovatnije makroskopsko stanje je najmanje uređeno, odnosno entropija mu je maksimalna, gledajući sva moguća stanja sistema.

Šta odgovara mikroskopskim stanjima u sistemu sa velikim brojem čestica, reda veličine broja čestica u jednom molu supstance?

- Mikroskopsko stanje svakog molekula je određeno, kao i za svako telo u mehanici, položajem tela i brzinom.
- Makroskopsko stanje sistema je određeno vrednostima termodinamičkih parametara $p, V, T, \dots$

- Potpuno je jasno da jedno makroskopsko stanje može da se realizuje na više načina. Na primer, poznata su stanja svih molekula. Ako koordinate i/ili brzine permutujemo dobićemo isto makroskopsko stanje.

Do sada smo imali dva primera procesa u kojima se povećava neuređenost sistema, slobodna ekspanzija i zagrevanje (prenos toplote). Kako ova dva procesa povećavaju broj mikroskopskih stanja i samim tim i entropiju sistema?

- Pri slobodnoj ekspanziji, na primer, idealnog gasa, povećava se zapremina gasa. Samim tim, povećava se skup koordinata koje odgovaraju mestima na kojima svaki molekul može da se nađe. Samim tim, povećava se broj mikroskopskih stanja u većoj zapremini, a time i entropija.
- Prilikom zagrevanja ili prenosa toplote povećava se temperatura sistema. Neka se zapremina ne menja, radi jednostavnosti. Broj mogućih položaja za svaki molekul se ne menja. Povećanje temperature širi Maksvelovu raspodelu po brzinama, odnosno, posle zagrevanja skup mogućih brzina je nešto veći. Samim tim i broj mogućih mikroskopskih stanja je nešto veći, pa je veća i entropija sistema.

Za bilo kakav sistem najverovatnije makroskopsko stanje je ono sa najvećim brojem odgovarajućih mikroskopskih stanja, odnosno najneuređenije stanje, stanje sa najvećom entropijom.

Neka je w broj mogućih mikroskopskih stanja za dato makroskopsko stanje sistema. Onda je entropija sistema:

$$S = k \ln w, \quad (5.16)$$

gde je k Bolcmanova konstanta. Ova definicija je statistička ili mikroskopska definicija entropije.

Broj mikroskopskih stanja je teško odrediti, ali promenu broja stanja u nekom procesu često nije.

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln w_2 - k \ln w_1 = k \ln \frac{w_2}{w_1}.$$

Ako nas zanima samo promena entropije onda bi iste rezultate dala i definicija:

$$S = k \ln w + S_0, \quad (5.17)$$

gde je S_0 proizvoljna konstanta. Ako je $S_0 = 0$, onda potpuno uređeno stanje $w = 1$ ima entropiju $S = 0$. Ova vrednost je fizički najmanja moguća, tako da je entropija uvek pozitivna veličina, a ako postoji S_0 je pozitivna konstanta.

Primer 5.8

Naći promenu entropije za slobodnu ekspanziju idealnog gasa.

Neka je početna zapremina V , u njoj ima N molekula, a konačna nV . Svaki molekul posle ekspanzije ima τ puta više mogućih stanja (srazmerno je promeni zapremine). Ukupan broj mikrostanja je povećan za τ^N . To znači da je:

$$w_2 = \tau^N w_1.$$

"Veoma je pogrešno tumačiti Drugi zakon termodinamike tako da postoji neka sila koja potiskuje sistem ka nekom posebno smeranom stanju nereda... Samo postoji mnogo više načina da nešto bude neuređeno nego da bude uređeno." (Enriko Fermi)

Odnosno:

$$\Delta S = k \ln \tau^N = kN \ln \tau = \nu R \ln \tau.$$

Statistička definicija nam daje još jedan uvid u spontane procese. Entropija zatvorenog sistema ne može da se smanji, jer sistem ne može spontano da smanji broj mikroskopskih stanja.

Primer 5.9

Razmotrimo slobodnu kompresiju. Gas u nekom sudu spontano u jednom trenutku zauzme samo polovinu zapremine. Kolika je verovatnoća da se to desi?

Slično kao kod ekspanzije ukupna verovatnoća je $\frac{1}{2^N}$. Za broj čestica koji je uporediv sa Avogadrovim brojem, ova verovatnoća nije jednaka nuli, ali... Izračunajte za jedan mol. Ovaj primer daje malo ozbiljnosti onoj neozbiljnoj formulaciji drugog zakona. Naime, ništa nije nemoguće, ali postoje procesi sa verovatnoćom ekstremno malom, pa pošto niko nije posvedočio da su se desili, onda se i neće desiti, bar ne za života našeg svemira.

Ireverzibilni procesi – dodatak

Videli ste da je za reverzibilne procese promena entropije u zatvorenom nizu procesa jednaka nuli. Za ireverzibilne procese važi:

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0. \quad (5.18)$$

Ovo je zapravo opšta relacija (Klauzijusova nejednakost) koja je za reverzibilne procese jednakost. Ako se nejednakost pažljivo pročita može da se zaključi da ako je potrebno sistem vratiti u početno stanje posle nekog cikličnog ireverzibilnog procesa, onda mu se mora smanjiti entropija, odnosno delovati spolja na njega.

Pošto entropija u spontanim procesima raste, onda se može reći da je sistem u stabilnoj ravnoteži ako mu je energija minimalna, a entropija maksimalna.

Treći zakon termodinamike

Nernstova teorema

Kao što je već pokazano, entropija je funkcija stanja. Promena entropije pri reverzibilnom prelazu sistema iz stanja 1 u stanje 2 je:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Integral sa desne strane može da se razloži:

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^0 \frac{dQ}{T} + \int_0^2 \frac{dQ}{T} = - \int_0^1 \frac{dQ}{T} + \int_0^2 \frac{dQ}{T} = S_2 - S_1.$$

Stanje „0” je neko referentno stanje, ali može da bude bilo koje ravnotežno stanje sistema. Referentno stanje je neodređeno, što za posledicu ima da je entropija određena do na konstantu.

Vrednost konstante S_0 , daje treći zakon termodinamike, odnosno Nernstova teorema.

Entropija bilo kojeg sistema na apsolutnoj nuli se uvek *može* uzeti da je jednaka nuli.

Preformulisan iskaz teoreme bi mogao da bude da entropija svakog termodinamičkog sistema teži nuli kada temperatura teži nuli (ako su ostali parametri fiksirani):

$$\lim_{T \rightarrow 0} S(T) = 0. \quad (5.19)$$

Iz ove jednačine može da se izrazi termodinamička definicija entropije:

$$S(T) = \int_0^T \frac{dQ}{T}. \quad (5.20)$$

Ako je entropija svih sistema na apsolutnoj nuli jednaka nuli, onda sva moguća stanja bilo kog sistema na apsolutnoj nuli imaju istu entropiju.

Sa druge strane ako u statističku definiciju entropije stavimo da je $S_0 = 0$, i da entropija teži nuli kada temperatura teži nuli, onda je:

$$\lim_{T \rightarrow 0} k \ln w = 0 \Rightarrow w = 1.$$

Drugim rečima, posledica ovako formulisane Nernstove teoreme je da je svaki sistem na apsolutnoj nuli u takvom makroskopskom stanju da ima samo jedno raspoloživo mikroskopsko stanje.

Jedna od posledica teoreme je da će sistem koji se nalazi na apsolutnoj nuli imati uvek istu entropiju, bez obzira na to da li mu se menjaju ostali parametri, osim temperature.

Može se pokazati da iz Nernstove teoreme sledi da toplotni kapacitet teži nuli kada T teži nuli, kao i da nije moguće dostići apsolutnu nulu temperature. S obzirom da se često treći zakon termodinamike svodi samo na tvrdnju da je nemoguće dostići temperaturu apsolutne nule, evo kratkog pregleda šta je sve obuhvaćeno trećim zakonom, odnosno šta sve sledi iz Nernstove teoreme.

- Entropija svih ravnotežnih sistema teži istoj vrednosti, S_0 , kada temperatura teži nuli.
- Može se uzeti da je $S_0 = 0$.
- Toplotni kapacitet (specifična toplota) svakog sistema teži nuli, kada temperatura teži nuli.
- Nije moguće postići temperaturu apsolutne nule u konačnom broju termodinamičkih procesa.

Za kraj, pošto je centralno mesto kursa rezervisano za zakone termodinamike, evo kako je prva dva zakona video jedan od velikana, Ričard Fejnman:

- I zakon: Energija vasiona je uvek konstantna.

Obratite pažnju na jednu finisu u formulaciji Nernstove teoreme, kaže se da se *može* uzeti da je entropija jednaka nuli na apsolutnoj nuli, ali *ne mora* nužno da bude jednaka nuli.

Nernstova teorema važi samo za sisteme u termodinamičkoj ravnoteži.

Pitanje je da li za svaki sistem postoji samo jedno moguće mikroskopsko stanje na apsolutnoj nuli. Ali bez obzira na to, posledice Nernstove teoreme su eksperimentalno proverljive i potvrđene su.

- II zakon: Entropija vasiona se uvek povećava.

Razmislite o ovim iskazima kada pređete gradivo. Videćete koliko su precizni, bez obzira na njihov anegdotski karakter. Vredi o njima razmišljati i diskutovati.

Toplotni kapacitet na niskim temperaturama – dodatak

Po definiciji, toplotni kapacitet (i specifična toplota) je proporcionalan količniku količine toplote i promene temperature. Ako se to iskoristi da bi se odredila entropija, dobija se:

$$S(T) = \int_0^T \frac{dQ}{T} = \int_0^T \frac{C(T)}{T} dT.$$

Videli ste da toplotni kapacitet zavisi od temperature, tačna zavisnost se ne zna, ali se on može razviti u red:

$$C(T) \approx \mathcal{A} + \mathcal{B}T + \mathcal{D}T^2 + \dots$$

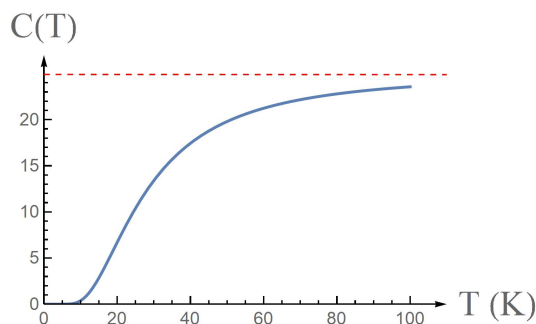
Kada se ovaj razvoj zameni u izraz za entropiju dobija se:

$$S(T) = \int_0^T \frac{1}{T} (\mathcal{A} + \mathcal{B}T + \mathcal{D}T^2 + \dots) dT,$$

odnosno:

$$S(T) = \mathcal{A} \int_0^T \frac{dT}{T} + \mathcal{B} \int_0^T dT + \mathcal{D} \int_0^T T dT \dots$$

Na osnovu Nernstove teoreme entropija treba da teži nuli, ako temperatura teži nuli. Prvi član u razvoju divergira. Zbog toga koeficijent $\mathcal{A}$ u toplotnom kapacitetu mora biti jednak nuli. Za $\mathcal{A} = 0$, toplotni kapacitet teži nuli kada temperatura teži nuli.

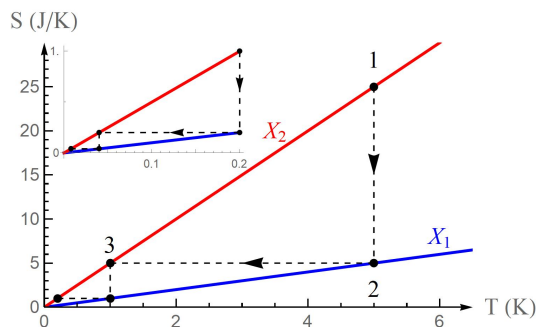


Nedostaje količina supstance, ali može se reći da je gornja jednačina za jedan mol supstance. Isto je za specifičnu toplotu, samo bi ona bila označena malim slovom c , i trebalo bi dodati masu supstance, ali od toga ništa ne zavisi u daljoj analizi.

Slika 5.12: Toplotni kapacitet u zavisnosti od temperature. Na niskim temperaturama se vidi prilično linearna zavisnost, mada skoro horizontalna, ali treba uzeti u obzir skalu na ordinati.

Nemogućnost dostizanja apsolutne nule – dodatak

Posledica Nernstove teoreme, koja se najčešće naziva trećim zakonom termodinamike, je da nije moguće dostići temperaturu od 0 K. Na osnovu osobine entropije na niskim temperaturama može da se dokaže ova tvrdnja.



Slika 5.13: Procesi hlađenja sistema u blizini apsolutne nule. U umetku je data zavisnost na još manjim temperaturama.

Neka je na niskim temperaturama entropija $S = aXT$ (na vrlo niskim temperaturama mogu da se zanemare viši članovi u razvoju entropije po temperaturi), gde je a proizvoljna pozitivna konstanta, a X neki termodinamički parametar koji može da se menja. Za dve vrednosti parametra X , entropija će biti linearna funkcija temperature, samo će prave imati različite nagibe (videti sliku 5.13).

Posmatrajmo tri stanja, obeležena na slici, 1, 2 i 3. Entropije u tim stanjima su:

$$S_1 = aX_2T_1, \quad (5.21)$$

$$S_2 = aX_1T_1, \quad (5.22)$$

$$S_3 = aX_2T_3. \quad (5.23)$$

Iz ovih jednačina se vidi da je:

$$X_1T_1 = X_2T_3.$$

Ako je, na primer:

$$X_2 = \lambda X_1,$$

onda je:

$$T_3 = \frac{T_1}{\lambda}.$$

Nije teško uočiti da je za niz od n procesa smanjivanja temperature menjanjem parametra X , konačna temperatura:

$$T_n = \frac{T_1}{\lambda^n}. \quad (5.24)$$

Vidi se da bi konačna temperatura u ovakvim procesima bila jednaka nuli, potrebno je izvršiti beskonačno mnogo koraka, pošto je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_1}{\lambda^n} = 0. \quad (5.25)$$

Dakle, direktna posledica trećeg zakona termodinamike, odnosno Nernstove teoreme je da nije moguće ostvariti apsolutnu nulu.

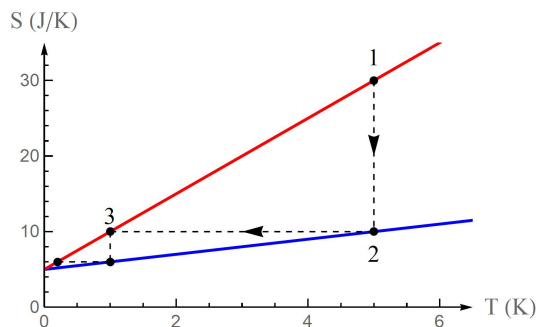
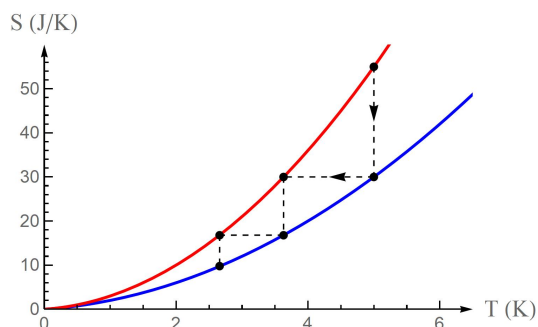
Odnosno:

Nije moguć proces, kako god da je idealizovan, u kome bi se entropija sistema smanjila na nulu (ili S_0), u konačnom broju koraka.

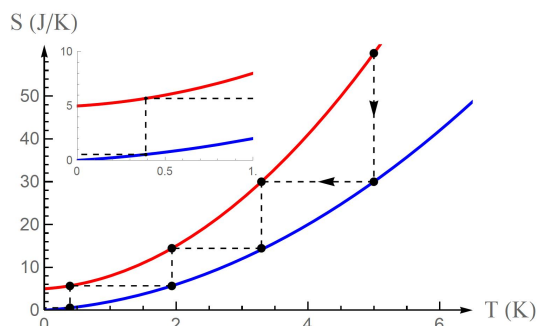
Ili ekvivalentno:

Nije moguć proces, kako god da je idealizovan, u kome bi se temperatura sistema smanjila na nulu u konačnom broju koraka.

Obratite pažnju na to da je za dokazivanje nemogućnosti dostizanja apsolutne nule dovoljno da konstanta S_0 bude ista za sve sisteme. Ne mora da bude jednaka nuli (videti sliku 5.14). Nernst je tvrdio da se može uzeti da je nula. Takođe, ne mora nužno da se uzme da je entropija linearna funkcija temperature u blizini apsolutne nule. Mogu u razvoju da se uzmu i viši članovi, kao što je prikazano na slici 5.15, ali zaključak je isti: Ako entropija teži istoj vrednosti za sve sisteme, i sve promene ostalih parametra, onda u konačnom broju koraka nije moguće dostići apsolutnu nulu.

Slika 5.14: Slučaj u kome S_0 nije jednak nuli.

Slika 5.15: Slučaj u kome entropija nije linearna funkcija temperature na niskim temperaturama.



Slika 5.16: Slučaj u kome bi bilo moguće dostići apsolutnu nulu, u konačnom broju koraka.

Da bi se dostigla apsolutna nula potrebno je da za različite vrednosti nekog termodinamičkog parametra entropija teži različitim vrednostima. Tada bi u konačnom broju koraka bilo moguće dostići apsolutnu nulu (slika 5.16). Ali različite granične vrednosti entropije zabranjuje Nernstova teorema.

Zadaci

Toplotne mašine

- 5.1 Neka u svakom trenutku na putevima ima 1000 kamiona u pokretu, i neka se svi daju opisati modelom iz primera 5.1. Koliku energiju emituju ovi kamioni u toku jednog dana? Koristeći podatke sa interneta uporediti ovaj rezultat sa električnom energijom koju napravi jedan generator u hidroelektrani u Srbiji.
- 5.2 Izračunati koeficijent korisnog dejstva dizelovog ciklusa, ako je poznat faktor kompresije, r , kao i odnos temperatura u izobarskom procesu $T_2/T_1 = \tau$.
- 5.3 Da li koeficijent efikasnosti hladnjaka može da bude veći od 1? Koliki bi bio koeficijent za idealni hladnjak?
- 5.4 U cilindar benzinskog motora (Otov ciklus sa sli-

ke 5.3) je ubrizgano dvostruko više goriva po ciklusu nego obično. Karakteristike cilindra ostaju iste, zapremina cilindra i faktor kompresije. Šta će se promeniti na pV -dijagramu ciklusa? (Možda ima više tačnih odgovora). (a) Vertikalno rastojanje između tačaka 3 i 4. (b) Vertikalno rastojanje između tačaka 1 i 2. (c) Horizontalno rastojanje između tačaka 3 i 2. Objasnite odgovore.

5.5 Kada je vreo dan, a nemate klimu u kući, da li možete da rashladite prostoriju tako što ćete otvoriti vrata frižidera i ostaviti ih otvorenim? Objasnite. Ako veliki prenosni frižider (rashladnu torbu) napunite kockama leda, i skinete poklopac, da li će se tako promeniti temperatura u prostoriji? Objasnite. Objasnite i razlike između ova dva slučaja ako postoje, ako ne postoje onda objasnite zašto ne postoje.

5.6 Klima uređaj ima koeficijent efikasnosti 3, kada je vruć dan. Tada radi snagom od 900 W. (a) Koliku količinu toplote klima uređaj apsorbira iz prostorije u svakom minutu? (b) Koliku količinu toplote klima uređaj emituje u okolinu svakog minuta? (c) Objasnite zašto rezultati u prethodna dva odgovora nisu isti.

Drugi zakon termodinamike

5.7 Da li idealna toplotna mašina, ili idealni hladnjak narušavaju prvi zakon termodinamike?

5.8 Zamislite obični frižider za domaćinstvo, u prodavnici. Neko od mušterija je zaboravio da zatvori vrata od frižidera, koji nije uključen. Da li je to idealan hladnjak? Objasnite.

5.9 Jedan političar je predložio nov način za proizvodnju energije. Molekuli vode bi se cepali na kiseonik i vodonik. Vodonik bi se zapalio, i goreo u prisustvu kiseonika, oslobađajući energiju. Jedini proizvod sagorevanja u ovom procesu je vodena para, pa ne bi bilo zagađenja. Da li biste uložili novac u ovaj projekat, ili biste političaru savetovali da obnovi gradivo iz termodinamike? Objasnite odgovor.

5.10 Da li kompletno pretvaranje mehaničke energije u toplotu narušava drugi zakon termodinamike? Objasnite.

5.11 Pogledajte ponovo zadatak 3.22. Da li bi pravljenje opisanog filtera bilo moguće po drugom zakonu termodinamike? Objasnite.

5.12 Elektromotor je povezan sa generatorom električne struje. Motor pokreće generator, deo struje se koristi za pokretanje motora, a preostali deo za osvetljenje. Zašto svi nemamo ovakav motor u kući? Objasnite.

5.13 Kada sušite veš na vrućem vetru u pustinji, temperatura veša tokom sušenja može da bude i do 20°C niža od temperature okolnog vazduha. Objasnite ovaj proces u svetlu drugog zakona termodinamike.

Karnoov ciklus

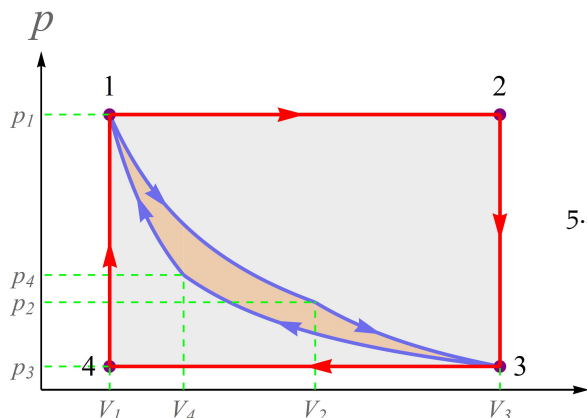
5.14 Izvedite izraz za koeficijent efikasnosti Karnoovog hladnjaka.

5.15 Pokažite da je iskaz za efikasnost Karnoovog hladnjaka ekvivalentna formulacija drugog zakona.

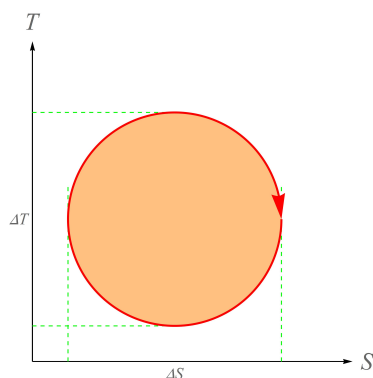
5.16 Zamislite opet političara iz zadatka 5.9. Radite u laboratoriji u kojoj se testiraju novi efikasni motori. On vas pita zašto bi vas uopšte država plaćala za to istraživanje efikasnih motora, kad možete da pravite Karnoove motore koji su najefikasniji (i tu vas podseti da ste ga poslali na kurs termodinamike gde je naučio da su najefikasnije Karnoove mašine). Kako biste mu odgovorili, i spasili finansiranje projekta?

5.17 Imate mogućnost da promenite jednu od temperatura, grejača ili hladnjaka u Karnoovom ciklusu. Možete da povećate temperaturu grejača ili snizite temperaturu hladnjaka za isto ΔT . U kom slučaju ćete dobiti veći koeficijent korisnog dejstva povećanjem temperature grejača ili smanjenjem temperature hladnjaka?

5.18 Na slici je prikazan Karnoov ciklus sa prilično realističnim parametrima. $T_g = 400\text{K}$, $T_h = 300\text{K}$, $V_1 = 0.02\text{m}^3$, $p_1 = 166280\text{Pa}$, $V_3 = 0.077\text{m}^3$, $p_3 = 32400.6\text{Pa}$. Posmatrajte ciklus koji se sastoji iz dve izobare i dve izohore, kao na slici. Očigledno je da ovaj ciklus vrši mnogo veći rad od Karnoovog sa iste slike. Kako je to moguće? Izračunajte koeficijent korisnog dejstva ciklusa sa slike, ako je gas idealan jednoatomske. Objasnite kako se rezultat uklapa sa ocenom koju nam sugeriše slika.



- 5.19 Posmatrajte sličan ciklus kao u prethodnom zadatku. Dve izobare i dve izohore. Odnos zapremine V_2/V_1 je isti kao u prethodnom zadatku. Najviša i najniža temperatura u ciklusu su iste kao za prikazani Karnoov ciklus. Koliki će biti odnos najvećeg i najmanjeg pritiska u tom slučaju? Uporediti rezultat sa istim odnosom za ciklus iz prethodnog zadatka. Skicirajte ciklus tako da bude uporediv sa slikom 5.18. Procenite koji ciklus vrši veći rad, ovaj ili Karnoov? Izračunajte radove, da li to potvrđuje vašu procenu? Da li mašina koja vrši veći rad ima i veći koeficijent korisnog dejstva? Objasnite zaključak.
- 5.20 Tekst iz novina: „Naš genijalni izumitelj napravio je toplotnu mašinu, sa neverovatnim koeficijentom korisnog dejstva od čitavih 85 %! Na žalost potrebna mu je finansijska pomoć da ovaj patent počne da proizvodi i uvede revoluciju na tržište toplotnih mašina, pošto nije naišao na razumevanje na Fizičkom fakultetu. U razgovoru za naš list, pronalazač je rekao da mu je radno telo komad bakra, a da se hladi običnim vazduhom iz atmosfere.” Da li biste mu finansirali proizvodnju, pošto znate da profesori sa fakulteta mogu da budu prilično konzervativni? Mala pomoć: temperatura topljenja bakra je 1356K.
- 5.21 Da li frižider pun hrane troši više energije ako je u prostoriji 20°C ili ako je 15°C ? Objasnite. Da li se odnos menja ako je frižider prazan?
- 5.22 Drugi zakon zabranjuje idealnu toplotnu mašinu ($\eta < 1$). Sa druge strane znate koliki je koeficijent korisnog dejstva Karnoovog ciklusa. Na osnovu do sada pređenog gradiva, procenite da li moguće da hladnjak bude na oK. Samim tim kolika god da je temperatura grejača koeficijent korisnog dejstva bi bio jednak 1. Po drugom za-
- konu koeficijent korisnog dejstva ne može da bude jednak 1, i mora da bude manji od Karnoovog koeficijenta. Sad vidimo da Karnoov koeficijent može da bude 1. Da li je tako? Objasnite.
- Entropija
- 5.23 Komadu leda od 350 g, temperature 0°C , dovedimo toplotu, sve dok se sav led ne otopi. (a) Kolika je promena entropije (vode) leda? (b) Ako je izvor toplote vrlo veliko telo na temperaturi 25°C , kolika je promena entropije ovog tela? (c) Kolika je ukupna promena entropije za telo i vodu u ovom procesu?
- 5.24 Dva cimera dele sobu u studentskom domu. Jedan je iskoristio priliku kad je bio sam u sobi da se okupa u kadi napunjenoj toplom vodom. Drugi je došao posle predavanja, napunio kadu, 270 litara vode, i shvatio da je voda mlaka, na 30°C . Zagrejavao je 5 litara vode na rešou, do ključanja, i sipao u kadu. Pretpostavite da se voda u kadi nije dodatno ohladila dok se voda u loncu grejala, kao i da nije bilo gubitaka energije dok nije došlo do mešanja. (a) Kolika je verovatnoća da drugi student studira fiziku ili tehniku? (b) Da li je proces u kadi reverzibilan ili ne? (c) Izračunajte temperaturu vode u kadi posle mešanja sa vrelom vodom. (d) Izračunajte ukupnu promenu entropije u ovom procesu.
- 5.25 Kocka leda, mase 15 kg, na temperaturi 0°C , se istopi u vodu temperature 0°C . Kocka se nalazi u velikoj sobi u kojoj je temperatura vazduha 20°C . Neka je sistem kocka leda i soba potpuno izolovan. Pretpostavite da je soba dovoljno velika da se promena temperature vazduha u njoj može zanemariti. (a) Da li je topljenje leda reverzibilan ili ireverzibilan proces? Objasnite tj. procenite bez računa. (b) Izračunajte promenu entropije i objasnite da li se rezultat slaže sa prethodnom procenom.
- 5.26 (a) Izračunajte promenu entropije jednog mola vode koja je na 100°C , i koja potpuno ispari u vodenu paru, na istoj temperaturi. (b) Uradite isto za 1 mol tečnog azota, srebra, žive. Sve potrebne podatke potražite na internetu. (c) Da li se rezultati za različite supstance mnogo razlikuju? Objasnite.
- 5.27 U TS-dijagramu, površina figure koja predstavlja ciklus je jednaka ukupnom radu radnog tela. Koliki je rad u ciklusu sa slike?



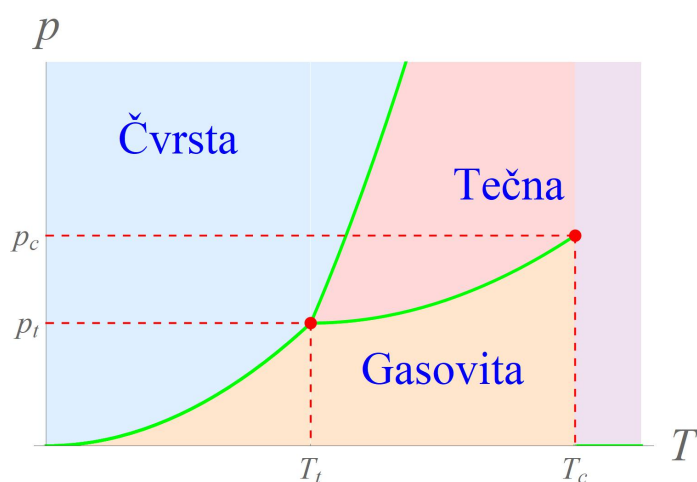
- 5.28 Zamislite proces u kome imate 2kg vode, koja je na temperaturi 50°C . U jednom trenutku voda se razdvoji na dva jednaka dela sa temperaturama 0°C i 100°C . Prvu polovinu iskoristite za osvežavajuću limunadu, a drugu za čaj. Da li je jedini problem u tome što ne bismo znali kada će voda da se razdvoji? Ako ima još problema kako biste pokazali da je ovakav savršeni uređaj za kafiće na plažama nemoguć?
- 5.29 Objasnite rezultat iz zadatka 5.17 samo na osnovu entropije.
- 5.30 Slobodna ekspanzija gasa je adijabatski proces. Gas ne vrši rad, pa je i promena unutrašnje energije jednaka nuli. Zbog toga je $Q/T = 0$. Sistem je neuređniji posle širenja, odnosno promena entropije je pozitivna. Kako je to moguće ako je $Q/T = 0$?
- 5.31 Da li su Zemlja i Sunce u termodinamičkoj ravnoteži? Da li se menja entropija nekog od delova sistema usled energije koja sa Sunca stiže na Zemlju? Da li za zračenje važe iste stvari kao i za druge mehanizme prenosa toplote, bar što se promene entropije tiče? Objasnite.
- 5.32 Zamislite nastavni film koji predstavlja sve osnovne rezultate iz fizike: mehaničke zakone, elektromagnetizam, termodinamiku... Neki šaljivi student namesti da se film prilikom prikazivanja vrti u nazad, od kraja ka početku. Kada ga tako gledate da li ćete videti pojave koje narušavaju zakone održanja energije? Impulsa? Drugog zakona termodinamike? Smislite neke primere.
- 5.33 Mnogi vatreni osporavaoci teorije evolucije tvrde da ona narušava drugi zakon termodinamike. Tokom razvoja živih bića dolazi do usložnjavanja organizama. Na primer, prvo smo imali organsku supu, prilično homogen sistem organske materije, onda su se pojavile ćelijske membrane koje su taj sistem podelile na nebrojeno mnogo delova. Usložnjavanje je počelo. Tako možete da zamislite da je današnji živi svet mnogo složeniji od onog na samom početku. To znači da je entropija živog sveta manja danas, nego na samom početku. Da li evolutivni razvoj visoko organizovanih živih sistema na Zemlji stvarno protivureče drugom zakonu? Objasnite.
- 5.34 Biljke od vazduha, vode i minerala iz zemlje stvaraju vrlo kompleksna jedinjenja. Da li to narušava drugi zakon? Objasnite.
- 5.35 Galijum je materijal koji se topi skoro na sobnoj temperaturi. Stavite komad galijuma, mase 25 g, na dlan i videćete kako se topi. Kolika je promena entropije galijuma? Kolika je promena entropije vašeg dlana? Da li raste ili opada (za dlan)? Da li je veća ili manja od promene entropije galijuma (ako su suprotnog znaka uporedite apsolutne vrednosti)?
- 5.36 Pri bacanju 4 kockice prebrojte sve kombinacije koje daju zbir 12, i izračunajte verovatnoću da se taj zbir dobije.
- 5.37 Dva gasa se nalaze u dva suda istih zapremina. Oba se slobodno rašire tako da im se zapremina poveća isti broj puta. Kom gasu se više promeni entropija, idealnom ili realnom?
- 5.38 Koristeći statističku definiciju entropije objasnite zašto ista količina toplote više promeni entropiju sistema koji je na nižoj temperaturi.
- 5.39 N molekula idealnog gasa zauzima zapreminu V . Kako se promeni entropija ako se gas reverzibilno proširi do zapremine $2V$: (a) izotermiski; (b) adijabatski.
- 5.40 N molekula idealnog gasa zauzima zapreminu V . Kako se promeni entropija ako se gas adijabatski proširi do zapremine $2V$: (a) reverzibilno; (b) ireverzibilno. Objasnite odgovor.
- 5.41 U posudi se nalazi pregrada koja je deli na dva jednaka dela. U jednoj polovini suda se nalazi 500 molekula gasa azota, a u drugoj polovini 100 molekula gasa kiseonika. Temperature oba gasa su jednake. U jednom trenutku se pregrada ukloni i ravnoteža se vrlo brzo uspostavi. Pretpostavite da je posuda dovoljno velika da pri ekspanziji oba gasa ne promene temperaturu. (a) Koliko će u srednjem biti molekula svakog gasa

- u svakoj polovini suda posle uklanjanja pregrade? (b) Koliko se promeni entropija sistema posle uklanjanja pregrade? (c) Kolika je verovatnoća da se posle nekog vremena svi molekuli azota nađu u jednoj, a svi molekuli kiseonika u drugoj polovini suda, kao kad je pregrada bila u sudu?
- 5.42 Slično kao u prethodnom zadatku, imate sud podeljan na dva jednaka dela, u oba dela je ista količina iste vrste gasa na istoj temperaturi. Kolika je promena entropije gasa ako se ukloni pregrada? Da li vam je rezultat logičan? Objasnite.
- 5.43 Dva mola idealnog gasa se nalazi u sudu zapremine V . Gas se raširi izotermiski reverzibilno do zapremine $3V$. (a) Da li se promeni funkcija raspodele broja molekula po brzinama pri ovakvoj ekspanziji? Objasnite. (b) Izračunajte promenu entropije gasa koristeći statističku i termodinamičku definiciju entropije (promene entropije). Uporedite rezultate.
- 5.44 Jedan balon zapremine 2.5 litara, u kome je 0.1 mol vazduha, greškom je ostavljen i slobodno lebdi u praznoj orbitalnoj stanici u kojoj nema vazduha. Kroz jedan prozorčić Sunčeva svetlost toliko zagreje balon da ovaj eksplodira, i vazduh slobodno ispuni celu stanicu, zapremine 450 m^3 . Izračunajte promenu entropije gasa u ovom procesu.
- Treći zakon termodinamike
- 5.45 Naka se u nekom sudu konačne zapremine nalazi proizvoljan gas. Entropija gasa zavisi od broja mikroskopskih stanja gasa. Broj mogućih pozicija molekula u sudu je beskonačan. Zar nije onda i entropija beskonačna? Objasnite.
- 5.46 Entropija idealnog gasa je:
- $$S(T, V) = C_V \ln T + R \ln V.$$
- Kolika je granična vrednost entropije kada temperatura teži nuli? Da li se to slaže sa Nernstovom teoremom?
- 5.47 Kako biste objasnili šta znači da je $C = 0$, koristeći definiciju toplotnog kapaciteta?
- 5.48 Čemu teži $C_p - C_V$, kada temperatura teži nuli?
- 5.49 Koristeći zavisnost toplotnog kapaciteta od temperature, objasnite zašto hladnjak Karnoovog ciklusa (a i bilo kakvog drugog) ne može da bude na apsolutnoj nuli.

6

Fazni prelazi

Faze materije–mikroskopski pogled



Slika 6.1: Fazni dijagram. Tri faze supstance (agregatna stanja) su prikazane različitim bojama. Prikazane su i trojna tačka i kritična tačka, sa tačno određenim parametrima (T_t, p_t) i (T_c, p_c) , respektivno.

Svaka supstanca za određene vrednosti termodinamičkih parametara se nalazi u određenoj fazi. Faza je vrsta poretka, uređenja, materije. Najčešći primer za fazu je agregatno stanje. Ali, nisu samo agregatna stanja faze. Moguće je da neki sistem ima više faza u istom agregatnom stanju.

Mnogo informacija o konkretnom sistemu sadrži fazni dijagram. Na slici 6.1 je prikazan fazni dijagram neke supstance. Na slici su različitim bojama označene oblasti termodinamičkih parametara, u kojima se supstanca nalazi u određenoj fazi, u ovom slučaju agregatnom stanju.

Ove oblasti su razdvojene krivama koje se nazivaju krive faznih prelaza. Ako se sistem nađe u stanju za koje su parametri na liniji faznog prelaza, sistem je u faznoj ravnoteži dve faze.

Linije faznih prelaza su:

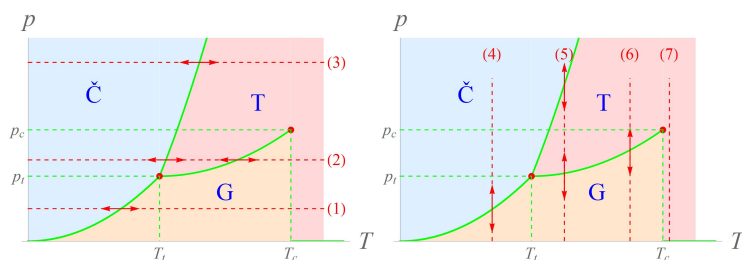
- kriva sublimacije (razdvaja čvrstu i gasovitu fazu);
- kriva isparavanja (razdvaja tečnu i gasovitu fazu);
- kriva topljenja (razdvaja čvrstu i tečnu fazu).

Jedini izuzetak je trojna tačka, to je tačka sa tačno određenim vrednostima parametara, u kojoj je sistem u faznoj ravnoteži tri faze.

Na slici je, pored trojne, prikazana još jedna karakteristična tačka. Ona takođe ima tačno određene vrednosti parametara, i naziva se kritična tačka.

	T_t (K)	p_t ($\times 10^5$ Pa)	T_c (K)	p_c ($\times 10^5$ Pa)
H	13.8	0.07	33.2	12.8
Ne	24.56	0.43	44.4	27.2
N	63.18	0.125	126.2	33.5
O	54.38	0.0015	154.6	49.8
NH ₃	195.4	0.06	405.5	111.3
CO ₂	216.55	5.17	304.19	72.8
H ₂ O	273.16	0.006	647.096	217.7

Tabela 6.1: Parametri trojne i kritične tačke



Slika 6.2: Fazni dijagram. Mogući fazni prelazi pri izobarskim (na slici horizontalnim) i izotermnim (vertikalnim) procesima.

Na faznom dijagramu se može videti još mnogo važnih stvari. Neka sistemu čiji je fazni dijagram prikazan na slici 6.1 možemo da menjamo temperaturu ili pritisak, ali tako da onaj drugi parametar bude konstantan (isprekidane linije (1)–(7) na slici 6.2). Tokom ovih procesa mogu da se dogode sledeće stvari:

- (1) Pritisak je konstantan i manji je od pritiska u trojnoj tački. Ako se sistem u čvrstom stanju zagreva, dolazi do temperature fazne ravnoteže (tačka preseka strelica i krive sublimacije). Sistem isparava i daljim zagrevanjem prelazi u gasovito stanje. Obratite pažnju da temperatura faznog prelaza zavisi od toga koliki je pritisak. U obrnutom smeru ako se temperatura gasa smanjuje, na istom pritisku, jedini fazni prelaz je očvršćavanje, odnosno sistem pređe u čvrsto stanje.
- (2) Pritisak je između pritiska trojne tačke i kritičnog pritiska. Ako je sistem u čvrstom stanju, zagrevanjem može da napravi dva fazna prelaza, prvo se istopi, a na višoj temperaturi i kompletno ispari. U obrnutom smeru gas se kondenzuje, a zatim tečnost očvrstne, pri smanjenju temperature.
- (3) Pritisak je viši od kritičnog pritiska. Sistem u čvrstom stanju zagrevanjem može da se istopi u tečnost.
- (4) Sad je temperatura fiksirana ispod temperature trojne tačke. Sistem iz čvrstog stanja, smanjivanjem pritiska prelazi u tečno stanje. Obrnuto pritiskanjem tečnosti na konstantnoj temperaturi tečnost može da očvrstne.

- (5) Ako je temperatura veća od temperature trojne tačke, a manja od kritične temperature, moguća su dva slučaja (bar za ovakav dijagram). Prva je da pri konstantnoj temperaturi sistem može da promeni sva tri agregatna stanja. Na primer pritiskanjem gasa dobija se tečnost, a daljim povećavanjem pritiska tečnost očvrstne. U obrnutom smeru se smanjivanjem pritiska od čvrstog tela može stići do gasa.
- (6) Oblik krive topljenja može da bude takav da je moguće naći konstantnu temperaturu pri kojoj promenom pritiska nije moguće proći kroz sve tri faze. U tom slučaju na primer, koliko god da pritiskamo tečnost ona neće očvrstnuti.
- (7) Kada je temperatura veća od kritične bilo kakva promena pritiska ne dovodi do faznog prelaza. Na nadkritičnoj temperaturi nema strukturne razlike između tečnosti i gasa.

Zaključak 1: Temperatura faznog prelaza zavisi od toga na kom se pritisku sistem nalazi.

Zaključak 2: Pritisak faznog prelaza zavisi od toga na kojoj temperaturi je sistem.

Zaključak 3: Prikazani sistem može da ima tri faze. Ipak, u određenim oblastima parametara (pritiska i temperature) moguće su samo dve faze, ili čak samo jedna (ako je temperatura iznad kritične). Samo u određenom intervalu parametara sistem može da ima sve tri faze.

Faze ne moraju da budu agregatna stanja. Na primer, gvožđe u čvrstoj fazi može da bude feromagnet ili paramagnet. Tečni helijum može da bude normalan ili superfluidan. Čvrsto olovo može da bude normalan metal ili superprovodnik. U poslednjoj glavi će biti zaokružena priča o faznim prelazima.

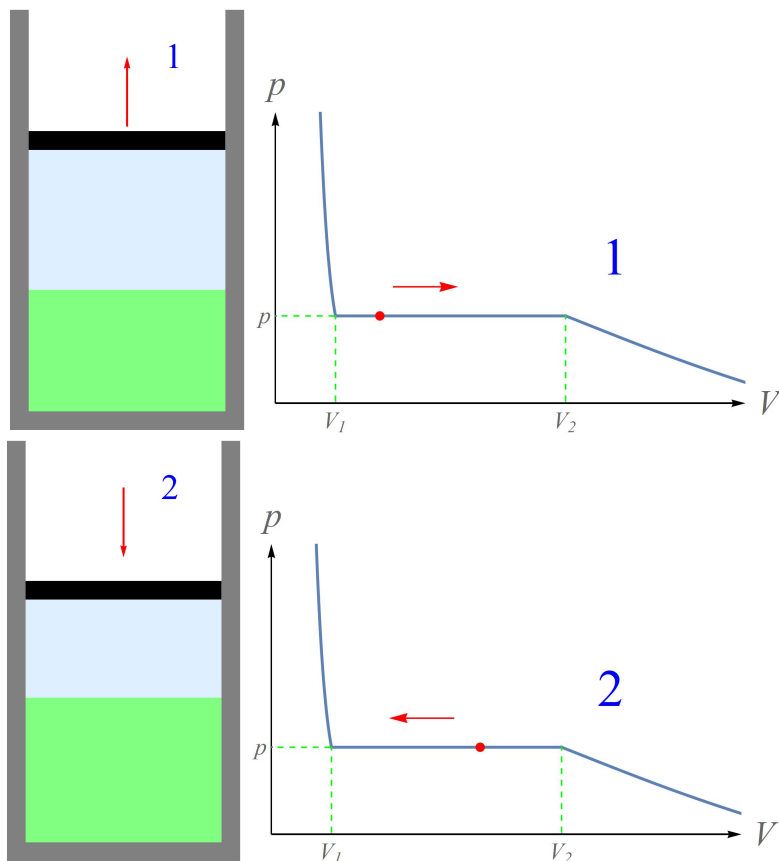
Fazni prelazi – završne napomene

Klapejronova jednačina

U sudu ispod pokretnog klipa nalazi se supstanca u faznoj ravnoteži tečnost–gas. Klip počne da se pokreće naviše, odnosno tako da se povećava zapremina suda. Sistem je u faznoj ravnoteži, pritisak i temperatura su konstantni. Povećanjem zapremine pritisak bi opao, ali sistem održava konstantan pritisak tako što deo tečnosti ispari. Stanje se pomeri na platou sa konstantnim pritiskom, nadesno, ka većoj zapremini, kao što je prikazano na slici 6.3.

U suprotnom procesu, kada se klip pomera tako da smanjuje zapreminu suda, onda da bi se održao konstantan pritisak, deo gasa mora da se kondenzuje, ima ga manje pod klipom i pritisak može da ostane isti.

Pritisak u oblasti fazne ravnoteže zavisi od temperature. Ako bi se temperatura promenila i plato bi se pomerio, pri zagrevanju naviše,



Slika 6.3: Reakcija sistema u faznoj ravnoteži na promenu spoljašnjeg pritiska.

pri hlađenju naniže (bio bi na drugim izotermama). Gustine pare i tečnosti takođe zavise samo od temperature.

Neka su v_t i v_p specifične zapremine tečnosti i pare. Specifična zapremina je:

$$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}, \quad (6.1)$$

odnosno vidi se da je ona inverzna gustina supstance.

Može se pokazati da je veza između promene pritiska fazne ravnoteže i promene temperature data sa:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(v_p(T) - v_t(T))}, \quad (6.2)$$

gde je q latentna toplota faznog prelaza. Količnik q/T je jednak promeni specifične entropije sistema ($s = S/m$) usled faznog prelaza, pa se gornja jednačina može napisati kao:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_p - s_t}{v_p(T) - v_t(T)}. \quad (6.3)$$

Ove jednačine su poznate kao Klapejronove jednačine. Na sličan način može da se pokaže da jednačina istog tipa važi za bilo koji fazni prelaz.

Primer 6.1**Primena Klapajronove jednačine**

Posmatrajmo fazni prelaz topljenja čvrste supstance. Latentna toplota topljenja je pozitivna, pošto je potrebno dovesti toplotu sistemu da bi počelo topljenje. Specifična zapremina tečnosti v_t je obično veća od specifične zapremine čvrstog tela v_s , zato što je gustina tečnosti manja. Klapajronova jednačina za ovaj fazni prelaz je:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{top}}{T(v_t(T) - v_s(T))},$$

zato što je topljenje prelaz čvrste faze supstance u tečnu. Ceo količnik sa desne strane u jednačini je pozitivan, što znači da je $\frac{dp}{dT} > 0$. Dakle $p(T)$ je rastuća funkcija, na većim pritiscima biće i viša temperatura topljenja. Pored toga, pošto je $q/T = s_t - s_s$, onda i entropija supstance u tečnoj fazi mora da bude veća od entropije u čvrstoj, što i jeste slučaj.

Za suprotni smer procesa, kristalizaciju ili očvrćavanje, latentna toplota je negativna $q_{kr} = -q_{top}$, pošto sistem otpušta toplotu tokom faznog prelaza. U jednačini je tada:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{kr}}{T(v_s(T) - v_t(T))},$$

pa je i razlika $(v(T) - v_t(T))$ negativna, što znači da je količnik opet pozitivan, pa je zaključak opet isti, ako se poveća pritisak temperatura faznog prelaza se povećava. S obzirom da je u pitanju isti fazni prelaz, samo proces teče u suprotnom smeru, zaključak i mora da bude isti.

Izvođenje Klapajronove jednačine – dodatak

Pored specifične zapremine, može se definisati i specifična unutrašnja energija:

$$u = \frac{U}{m}. \quad (6.4)$$

Neka su specifične unutrašnje energije tečnosti i pare u_t i u_p , respektivno.

Kao što je već pomenuto pritisak p , i specifične veličine v_t , v_p , u_t i u_p zavise samo od temperature.

Ukupna masa supstance je jednaka zbiru masa tečnosti i pare $m = m_t + m_p$. Zapremina i unutrašnja energija sistema su:

$$V = m_t v_t(T) + m_p v_p(T), \quad (6.5)$$

$$U = m_t u_t(T) + m_p u_p(T). \quad (6.6)$$

Ako se temperatura sistema promeni za dT , tako da deo tečnosti ispari, tako da su nove mase tečnosti i pare $(m_t - dm)$ i $(m_p + dm)$.

Zapremina suda posle promene temperature je:

$$V + dV = (m_t - dm) v_t(T) + (m_p + dm) v_p(T) \quad (6.7)$$

$$= V + (v_p(T) - v_t(T)) dm, \quad (6.8)$$

što znači da je:

$$dV = (v_p(T) - v_t(T)) dm. \quad (6.9)$$

Na sličan način može da se pokaže da je:

$$dU = (u_p(T) - u_t(T)) dm. \quad (6.10)$$

Zamenom gornjih jednačina u jednačinu za prvi zakon termodinamike dobija se:

$$dQ = dU + p dV = (u_p(T) - u_t(T)) dm + p (v_p(T) - v_t(T)) dm,$$

odnosno:

$$\frac{dQ}{dm} = u_p(T) - u_t(T) + p (v_p(T) - v_t(T)) = q. \quad (6.11)$$

gde je q latentna toplota faznog prelaza.

Sa druge strane količnik jednačina 6.9 i 6.10 je jednak izvodu unutrašnje energije po zapremini:

$$\frac{dU}{dV} = \frac{u_p(T) - u_t(T)}{v_p(T) - v_t(T)}. \quad (6.12)$$

Preciznije rečeno, gornji izraz nije totalni izvod, pošto unutrašnja energija ne zavisi samo od zapremine. Malo se promenila temperatura, ali se sve vreme fazni prelaz događa na nekoj izotermi (ovoga puta na $T + dT$ izotermi), tako da je gornji izraz parcijalni izvod unutrašnje energije po zapremini, pri konstantnoj temperaturi:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = \frac{u_p(T) - u_t(T)}{v_p(T) - v_t(T)}. \quad (6.13)$$

U sledećem koraku uzećemo relaciju koju ćete moći da pokažete na statističkoj fizici:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p. \quad (6.14)$$

Ako se jednačina 6.11 podeli sa $(v_p(T) - v_t(T))$, dobija se:

$$\frac{q}{v_p(T) - v_t(T)} = \frac{u_p(T) - u_t(T)}{v_p(T) - v_t(T)} + p,$$

odnosno:

$$\frac{u_p(T) - u_t(T)}{v_p(T) - v_t(T)} = \frac{q}{(v_p(T) - v_t(T))} - p.$$

Poređenjem sa relacijom 6.14 dobija se:

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p = \frac{q}{(v_p(T) - v_t(T))} - p. \quad (6.15)$$

Posle sređivanja dobija se:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{q}{T(v_p(T) - v_t(T))}. \quad (6.16)$$

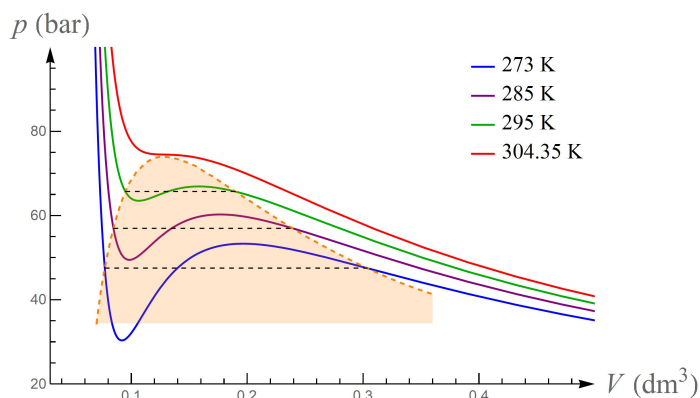
U faznoj ravnoteži sve veličine praktično zavise samo od temperature, pa je leva strana praktično jednaka izvodu pritiska po temperaturi:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(v_p(T) - v_t(T))}. \quad (6.17)$$

Kritični parametri za Van der Valsov gas

Već je nekoliko puta korišćena Van der Valsova jednačina za opis sistema u faznoj ravnoteži tečnosti i gasa ili u njenoj blizini. Kao što je rečeno u poglavlju o faznim dijagramima, fazni prelaz ključanja se završava kritičnom tačkom. Van der Valsova jednačina nam daje mogućnost za određivanje parametara kritične tačke.

Kako se sistem približava kritičnoj tački tako se sužava oblast fazne ravnoteže (osenačeni deo na slici 6.4), da bi se u kritičnoj tački oblast završila tačkom (vrh osenačene oblasti). Upravo ova činjenica može da se iskoristi za nalaženje kritičnih parametara.



Slika 6.4: Van der Valsove izoterme za različite temperature. Crvenom bojom je označena kritična izoterma. Oblast fazne ravnoteže je osenačena.

Plato (oblast) fazne ravnoteže je određen tako da površina krive ispod sečice bude jednaka površini krive iznad sečice. Sečica preseca krivu na tri mesta. Dakle, za fiksiranu vrednost pritiska postoje tri različite zapremine sa Van der Valsove krive. Ako fiksiramo pritisak, onda zapremina može da se odredi iz kubne jednačine.

Iz jednačine za jedan mol supstance:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (6.18)$$

dobija se:

$$pV^3 - (pb + RT)V^2 + aV - ab = 0. \quad (6.19)$$

Ova jednačina važi i za kritičnu izotermu, $p = p_c$. Sa druge strane u kritičnoj tački rešenje ove jednačine, $V = V_c$, je tri puta degenerisano. To znači da je:

$$p_c V^3 - (p_c b + RT_c)V^2 + aV - ab = p_c(V - V_c)^3. \quad (6.20)$$

Razvijanjem kuba binoma i izjednačavanjem koeficijenata dobijaju se kritični parametri:

$$V_c = 3b, \quad p_c = \frac{a}{27b^2}, \quad T_c = \frac{8a}{27Rb}. \quad (6.21)$$

Kritični parametri zavise od vrste supstance zato što zavise od parametara a i b .

Pored mogućnosti da se odrede kritični parametri, Van der Valsova jednačina krije i jednu vrlo zanimljivu, i sredinom dvadesetog veka, popularnu činjenicu.

Uvedimo nove bezdimenzione veličine:

$$\pi = \frac{p}{p_c}, \quad v = \frac{V}{V_c}, \quad \tau = \frac{T}{T_c}. \quad (6.22)$$

Kada se ove veličine uvrste u Van der Valsovu jednačinu dobija se:

$$\left(\pi + \frac{3}{v^2}\right) \left(v - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\tau. \quad (6.23)$$

Na prvi pogled samo smo promenili oznake, ali u novoj jednačini više nema veličina koje eksplicitno zavise od vrste sistema. Kada razmislite o smislu smena može da se zaključi sledeće, da će dva sistema podjednako udaljena od kritične tačke (iste vrednosti π , v i τ) zadovoljavati istu jednačinu, odnosno ponašaće se isto.

Ma koliko da su različiti sistemi, oni se u blizini kritične tačke ponašaju na skoro identičan način, gubi im se skoro svaka karakteristika sistema. Ili ako se invertuje Tolstojeva rečenica, svi sistemi daleko od kritične tačke imaju jasna svojstva po kojima se razlikuju, ali kako se približavaju kritičnoj tački počinju da liče jedni na druge. Ovo je početak teorije univerzalnosti kritičnih pojava, o kojoj ćete više učiti na završnim godinama studija.

Zadaci

Faze materije

- 6.1 Zašto na površini Marsa nema vode (tečne)? Potrebne podatke možete pronaći na internetu.
- 6.2 Pogledajte grafik 6.1 i podatke iz tabele 6.1. Zašto ovakav grafik ne bi dobio pohvale na bilo kojim eksperimentalnim vežbama?
- 6.3 Čaša sa vodom, koja je na sobnoj temperaturi, nalazi se u većoj zatvorenoj posudi iz koje može da se ispumpava vazduh. Vazduh se lagano ispumpava, kada se napravi dovoljno mali pritisak voda počne da ključa. Temperatura vode se ne povećava dok ključa već se blago smanji. Objasnite ovaj fenomen.
- 6.4 Led može da bude vrlo klizav. Posebno je klizav ako nosite klizaljke, što je i zgodno za klizanje. Objasnite zašto klizaljke izgledaju kako izgledaju i kakve veze to ima sa faznim prelazima?
- 6.5 Termalni izvori postoje i na morskom ili okeanskom dnu. Jedan izvor, na primer, ubrizgava vodu temperature oko 250°C u okean. Zašto ta voda ne ključa?
- 6.6 Ako kupite pakovanje pirinča u severnoj Indiji ili južnoj Kini (ili bilo kojoj oblasti sa visokim planinama), na uputstvu za pripremu postoji dodatak za kuvanje na velikim nadmorskim visinama. Tu piše da se na visini pirinač kuva duže i u većoj količini vode. Zašto? Kakve veze ima nadmorska visina sa ukusnim pirinčem?
- 6.7 Kada su Britanci okupirali Keniju, počeli su kreativno da se penju na Kilimandžaro. Ispod samog vrha, osvežavali su se sveže skuvanim čajem. Međutim bili su prilično razočarani ukusom. Nije to bio ukus čaja na koji su navikli. Pomislili su da je problem u lokalnoj vodi, pa su počeli sa sobom da nose vodu na vrh planine, ali ukus čaja se nije promenio. Umalo nisu bacili sve zalihe čaja, kada se jedan planinar dosetio da isti čaj skuva u podnožju planine. Ukus je bio standardno dobar. Šta se desilo sa čajem na vrhu planine?
- 6.8 Komadić leda na temperaturi od 0°C i posuda sa vodom na istoj temperaturi su smešteni u posudu koja se dobro zatvara. Sav vazduh iz posude je ispumpan. Ako je temperatura unutar posude ostala ista, šta se nalazi u posudi posle uspostavljanja termodinamičke ravnoteže?

Fazni prelazi

- 6.9 Izračunati $\frac{dp}{dT}$ za vodu na temperaturi ključanja, i atmosferskom pritisku. Specifična zapremina vodene pare je $v_p = 1.667 \frac{m^3}{kg}$.
- 6.10 Pretpostaviti da je u prethodnom zadatku voda idealan gas, i da je $v_t \ll v_p$. Uporediti dobijeni rezultat sa rezultatom iz prethodnog zadatka.
- 6.11 Izračunati $\frac{dp}{dT}$ za vodu na temperaturi topljenja leda. Da li se na osnovu rezultata temperatura topljenja leda smanjuje ili povećava ako se pritisak vode poveća?
- 6.12 Zamislite sledeći ogled. Imate veliki komad leda u obliku kvadra (dugačke grede). Led je oslonjen na dva nosača. U prostoriji je temperatura oko $0^\circ C$ tako da se led ne topi. Preko sredine leda je prebačena žica na čijim krajevima su masivni tegovi. Tokom vremena žica „seče“ led i lagano se spušta ka donjoj ivici. U jednom trenutku prođe kroz led i padne na pod. Ledena greda se ne prelomi. Ako biste je pogledli izbliza bila bi kompaktna kao i pre „sečenja“. Objasnite ovaj ogled.
- 6.13 U dubokim i uskim klancima na visokim planinama često ima velikih glečera. Kada su glečeri veoma veliki može da se desi da glečer počne da klizi i ako temperatura vazduha nije ni blizu $0^\circ C$ (daleko je hladnije). Kada takav glečer počne da klizi iz klanca zaustavi se čim izađe na nešto širi prostor. Kako biste objasnili ovakav efekat sa glečerima?
- 6.14 Izvedite izraze za kritične parametre Van der Valsovog gasa. Izračunajte kritične parametre za vodu.

Bibliografija

Hugh D. Young, Roger A. Freedman and A. Lewis Ford. *Sears And Zemansky's: University physics with modern physics*. Addison-Wesley, 13 edition, 2012.

Д. В. Сивухин. *Механика, Общий курс физики, том 1*. Наука, Москва, 1989.

Д. В. Сивухин. *Термодинамика и молекулярная физика, Общий курс физики, том 2*. ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2005.

И. Е. Иродов. *Физика макросистем. Основные законы*. Бинوم. Лаборатория знаний, 2006.

Paul A. Tipler and Gene Mosca. *Physics For Scientists and Engineers with Modern Physics*. W. H. Freeman and Company, New York, 2008.

Enrico Fermi. *Thermodynamics*. Dover Publications Inc., 1957.

С. П. Стрелков. *Механика*. Наука, Москва, 1975.